LIETUVOS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS GAMTOS FAKULTETO DARBAI
1923

MÉMOIRES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE LITHUANIE
1923

[T. 2]

Turinys:

Prof. Otto Volk, Kaunas — Über die Entwicklung komplexer Funktionen, nach den Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen.
Apie išvystyma kompleksinių funkcijų pagal Hermit'o ir Laguerre'o funkcijų.

Die Abbildung $\zeta = \frac{\sqrt{z^2 - b^2} - \sqrt{z^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}$
Atvaizdas

Studien über einige Randwertaufgaben der Potentialtheorie
Studijos apie kelis kraštinių vertybių uždavinius potencialo teorijoj.

Prof. Otto Volk, Kaunas und J. Kapfer, München — Über Paare von isogonalen isometrischen Kurven.
Apie izogonalinių-izometrinių kreivių poras.

Prof. Kastantinas Regelis, Kaunas — 1923 m. Lietuvos Universiteto Botanikos Sodnas, Kabinetas ir Muzejus.
Le Jardin Botanique de l'Université de Lithuanie en 1923

*

* KAUNAS 1925 *

LIETUVOS UNIVERSITETO
MATEMATIKOS GAMTOS FAKULTETO DARBAI
1923

MĖMOIRES DE LA FACULTĖ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITĖ DE LITHUANIE
1923

[J.2]

1950

11330

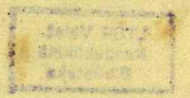
6

Ueber die Entwicklung komplexer Funktionen

nach den Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen

von

OTTO VOLK IN KAUNAS



Buchdruckerei „RYTAS", Akt.-Ges., Memel und Tilsit.

Alp 393

Apie kompleksinių funkcijų išsivystymą Hermito ir Lagerrio funkcijomis.

Über die Entwicklung komplexer Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen

von Otto Volk in Kaunas.

Šitasai darbas turi tikslo jau autoriaus[1]) aukščiau paliestą bendrąjį klausimą pritaikinti išimtinai Hermito ir Lagerrio funkcijoms.

Pirmiausia reikėjo antrosios lyties funkcijas ištirti. Prie to pasirodė tulos analogijos su antrosios lyties skritulio funkcijomis.

Ypatingo dėmėsio sukėlė Lagerrio antrosios lyties funkcijos, nes apribojamos fundamentalinės lygtys davė dvilypę šaknį.

Šiaip pasireiškusieji išsivystymai turėjo vertės Hermito funkcijose viduje vienos dviejų lygiagrečių realės ašies linkui, Lagerrio funkcijų atvejuje sričiai apribotai parabolėmis.

Die folgende Arbeit will die in einer früheren Arbeit[2]) behandelte allgemeine Theorie auf den Ausnahmefall der Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen anwenden. Während nämlich dort die Voraussetzungen gemacht werden, dass die Umkehrung des Integrals

$$t = \int \frac{dz}{\sqrt{P_2(z)}}, \quad z = \Phi(t)$$

eine reelle Periode φ_1 besitze und $\Re(it) = \beta$ (β konstant) in der Z-Ebene eine geschlossene, ganz im Endlichen verlaufende Kurve entspreche, sind im Falle der Hermiteschen und Laguerreschen Funktionen diese beiden Voraussetzungen nicht erfüllt.

Für reelle Variable ist das Problem auf verschiedene Weise gelöst[3]); für komplexe Veränderliche dagegen ist die Aufgabe

---

[1]) Palyg. Math. Annal., 86 (1922) l. 296—316.

[2]) O. Volk, Über die Entwicklung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen nach Funktionen, die einer linearen Differentialgleichung mit einem Parameter genügen. Math. Annal. Bd. 86 (1922) S. 296—316, wo sich auch eine Zusammenfassung der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit findet.

[3]) Vgl. R. Neumann, Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen und Laguerreschen Orthogonalfunktionen auf Grund der Theorie der Integralgleichungen. Diss. Breslau, 1912. (Einl. zu Kap. III.)

nur im Falle der Hermiteschen Funktionen für die damit zusammenhängenden Funktionen des parabolischen Zylinders von G. N. Watson[1]) in sehr umständlicher Weise behandelt. Für die Laguerreschen Funktionen fehlte bisher diese Entwicklung.

Zunächst galt es, die Funktionen zweiter Art für komplexe Argumente zu untersuchen[2]). Dabei ergaben sich gewisse Analogieen zu den Kugelfunktionen zweiter Art, die sich bekanntlich so darstellen lassen:

$$Q_n(z) = R_{n-1}(z) + P_n(z) \lg \frac{z-1}{z+1},$$

wo $R_{n-1}(z)$ eine ganze rationale Funktion vom $n-1$. Grade in z bedeutet. An Stelle von $\lg \frac{z-1}{z+1}$ tritt dabei $\int_z^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ bzw. $\int_{-\infty}^{z} \frac{e^z}{z} dz$. Von besonderem Interesse waren die Laguerreschen Funktionen, da bei ihnen die determinierende Fundamentalgleichung eine Doppelwurzel ergab. Die Differentialgleichungen der zugeordneten Funktionen sind in beiden Fällen homogen und die sich ergebenden Entwicklungen gelten im Falle der Hermiteschen Funktionen innerhalb eines von zwei Parallelen zur reellen Achse begrenzten Flächenstreifens, im Falle der Laguerreschen Funktionen für von Parabeln begrenzte Gebiete.

---

[1]) G. N. Watson, The harmonic functions associated with the parabolic cylinder. Proc. of the Lond. math. Soc. (2), 8. 1910, S. 393–421.

[2]) Für reelle Argumente war dies in gewisser Beziehung schon geschehen. Vgl. W. Kapteyn, Over de functies von Hermite, Verslagen k. Akad. von Wetenshyppen te Amsterdam, Bd. XXII, (1914) 1st gedeelte, S. 1057 ff., 2e ged. S. 1085 ff. XXIII, S. 49 ff. (3de ged.); Laguerre, Sur l'intégrale $\int_z^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz$; Oeuvres I, (1898), S. 428 ff.

I. Die Hermiteschen Funktionen.

§ 1.

Die Hermiteschen Polynome und Funktionen zweiter Art.

Die Hermiteschen Polynome:

$$(1) \qquad H_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{2}} \cdot \frac{d^n\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right)}{dz^n}$$

genügen der Differentialgleichung:

$$(2) \qquad y'' - z \cdot y' + n y = 0;$$

letztere geht durch die Substitution:

$$(3) \qquad y = e^{\frac{z^2}{4}} \cdot u$$

über in:

$$(4) \qquad u'' + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) u = 0;$$

hieraus folgt:

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} H_m(z)\, H_n(z)\, dz = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \sqrt{2\pi} \cdot n! & \text{für } m = n. \end{cases}$$

Ein zweites Integral der Gleichung (2) ist:

$$(6) \qquad K_n(z) = H_n(z) \int_z^{\pm i\infty} \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{H_n(z)^2}\, dz,$$

wo das $\pm$ Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $\Re(iz) \lesseqgtr 0$ ist und der Integrationsweg die reelle Achse nicht treffen darf. Durch Zerlegen von $\frac{1}{H_n(z)^2}$ in Partialbrüche findet man:

(7) $$K_n(z) = e^{\frac{z^2}{2}} R_{n-1}(z) + C_n H_n(z) \cdot \int_z^{\pm i\infty} e^{\frac{z^2}{2}} dz,$$

wo $R_{n-1}(z)$ eine ganze rationale Funktion von z vom Grade $n-1$ und C_n eine gewisse Konstante $\left(= \sum_0^n i \frac{1}{H'_n(\alpha_i)^2} = \frac{1}{n!}\right)$ bezeichnet.

Mittels der Differentialgleichung (2) findet man für die Koeffizienten der Funktion $R_{n-1}(z)$:

$$a_{2\nu+2} = \Big[(n-2\nu-3)(n-2\nu-5)\cdots 3\cdot 1 - \frac{n(n-1)}{2}(n-2\nu-5)\cdots 3\cdot 1 + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-\nu-1} \frac{(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdots(2\nu+2)} n(n-2)\ldots(n-2\nu)\Big] C_n$$

$$a_{2\nu} = 0$$

für gerade n; für ungerade n ist:

$$a_{2\nu+1} = 0;$$

$$a_{2\nu} = \Big[(n-2\nu-2)(n-2\nu-4)\cdots 3\cdot 1 - \frac{n(n-1)}{2}(n-2\nu-4)\cdots 3\cdot 1 + \cdots\cdots\Big] C_n.$$

Die Hermitesche Funktion zweiter Art $K_n(z)$ lässt sich durch eine ganze rationale Funktion $n-1$. Grades, multipliziert mit $e^{\frac{z^2}{2}}$ und ein Produkt aus $H_n(z)$ und $\int_z^{\pm i\infty} e^{\frac{z^2}{2}} dz$ darstellen[1]).

§ 2.

Die den Hermiteschen Polynomen zugeordneten Funktionen.

Entwickelt man $\frac{1}{z_1 - z}$ nach den Hermiteschen Polynomen, so erhält[2]) man:

[1]) Andere Darstellungen finden sich bei Kapteyn, l. c. 1st. ged. S. 1058 ff., Whittaker, Proc. of the Lond. math. soc. (1), 35, S. 422 und Watson l. c. S. 395.

[2]) Vergl. die oben erwähnte Arbeit: Math. Annal. Bd. 86 (1922). S. 299 ff.

$$(8) \qquad \frac{1}{z_1 - z} = \sum_{0}^{\infty} n \, H_n(z) \cdot J_n(z_1),$$

wo $J_n(z_1)$ der Differentialgleichung zu genügen hat:

$$(9) \qquad y'' + z_1 y' + (n+1) y = o,$$

die durch die Substitution:

$$(10) \qquad y = e^{-\frac{z_1^2}{2}} \cdot u$$

übergeht in:

$$(11) \qquad u'' - z_1 u' + n u = o$$

Machen wir die Annahme, dass die Reihe (8) gliedweise integriert werden kann, so ergibt sich mit Rücksicht auf (5):

$$(12) \qquad J_n(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot H_n(z)}{z_1 - z} \, dz,$$

Wir wählen den Integrationsweg so, dass er von $-\infty$ längs der negativen reellen Achse bis zum Kreis mit dem Radius $|z| = a > |z_1|$ geht, sich über den oberen, (wenn $\Re(i z_1) > o$), oder über den unteren Halbkreis (wenn $\Re(i z_1) < o$) zur positiven reellen Achse fortsetzt und dann längs letzterer nach $+\infty$ geht. Es ist nun:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z)}{z_1 - z} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \frac{H_n(z) - H_n(z_1)}{z_1 - z} dz + H_n(z_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z_1 - z} dz.$$

Sei zunächst n gerade; dann ist:

$$\frac{H_n(z) - H_n(z_1)}{z_1 - z} = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot \left[\frac{n}{2} (z_1 + z) - n(n-2) 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (z_1^3 + z z_1^2 + z^2 z_1 + z^3) + \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{n(n-2) \cdots 4 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot (z_1^{n-1} + z z_1^{n-2} + \cdots + z^{n-1}) \right]$$

Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^{\nu} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \begin{cases} 0 & \text{, wenn } \nu \text{ ungerade,} \\ (\nu-1)(\nu-3)\cdots 3\cdot 1\cdot\sqrt{2\pi} & \text{, wenn } \nu \text{ gerade,} \end{cases}$$

so wird:

$$(13a)\quad -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_n(z)-H_n(z_1)}{z_1-z}\, dz = z_1^{n-1} + \left(1-\frac{n(n-1)}{2}\right) z_1^{n-3}$$

$$+\cdots+\Big((n-2\nu-3)(n-2\nu-5)\cdots 3\cdot 1$$

$$-\frac{n(n-1)}{2}(n-2\nu-5)\cdots\cdot 3\cdot 1+\cdots\cdot$$

$$+(-1)^{\frac{n}{2}-\nu-1}\frac{(2\nu+3)(2\nu+5)\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2\nu+2)}\, n(n-2)\cdots(n-2\nu)\Big)\, z_1^{2\nu+1}$$

$$+\cdots+\left(\cdots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1\cdot\frac{n}{2}\right) z_1$$

Ist n ungerade, so erhält man:

$$\frac{H_n(z)-H_n(z_1)}{z_1-z} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\Big(-1+\frac{n-1}{1\cdot 2\cdot 3}(z_1^2+zz_1+z_1^2)$$

$$+\cdots\cdot+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{1\cdot 2\cdots n}$$

$$\cdot(z_1^{n-1}+zz_1^{n-2}+\cdots+z^{n-1})\Big)$$

und daher:

$$(13b)\quad -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{H_n(z)-H_n(z_1)}{z_1-z}\,dz = z_1^{n-1}+\left(1-\frac{n(n-1)}{2}\right)z_1^{n-3}+\cdots$$

$$+\Big((n-4)(n-6)\cdots 3\cdot 1-\frac{n(n-1)}{2}(n-6)(n-8)\cdots 3\cdot 1$$

$$+\cdots+(-1)^{\frac{n-3}{2}}\frac{n-1}{2}\cdot 1\cdot 3\cdots n\Big)z_1^2+(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1$$

$$-\frac{n(n-1)}{2}\cdot(n-4)(n-6)\cdots 3\cdot 1+\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}3\cdot 5\cdots n.$$

Ferner können wir in dem Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z_1 - z}\,dz \cdot \frac{1}{z_1 - z}$ in eine Potenzreihe entwickeln:

$$\frac{1}{z_1 - z} = -\sum_{0}^{\infty} \frac{z_1^{\nu}}{z^{\nu+1}}$$

und es wird, da die gliedweise Integration erlaubt ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z_1 - z}\,dz = -\sum_{0}^{\infty} z_1^{\nu} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} z^{-\nu-1} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz .$$

Setzt man $z^2 = 2t$, so wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^{-\nu-1} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = 2^{-\frac{\nu+2}{2}} \int_{L'} t^{-\frac{\nu+2}{2}} e^{-t}\,dt$$

wo der Integrationsweg L' vom Unendlichen längs der positiven reellen Achse in positivem bezw. negativem Sinne um den Nullpunkt herum und schliesslich längs der positiven reellen Achse zum Unendlichen zu führen ist, je nachdem der Integrationsweg L in der Z-Ebene den unteren bezw. oberen Halbkreis enthält.

Nun ist:

$$\int_{L'} t^{-\frac{\nu+2}{2}} \cdot e^{-t}\,dt = \frac{e^{\pm\frac{\nu+1}{2}\pi i}}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)} 2\pi ,$$

wo das $\pm$ Zeichen zu wählen ist, je nachdem der Nullpunkt in positivem oder negativem Sinne umkreist wird. Somit wird:

$$(14) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} z^{-\nu-1} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \frac{2^{-\frac{\nu}{2}} e^{\pm\frac{\nu+1}{2}\pi i}}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)} \pi ,$$

wo das $\pm$ Zeichen zu wählen ist, je nachdem der Integrationsweg den unteren bezw. oberen Halbkreis durchläuft. Wir erhalten daher:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z_1 - z}\,dz = \sum_{0}^{\infty} e^{\pm\frac{\nu+1}{2}\pi i} \cdot \frac{2^{-\frac{\nu}{2}}\pi}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)} z_1^{\nu} .$$

Nun ist:

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)} = \begin{cases} \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\frac{\nu}{2}}, & \text{wenn } \nu \text{ gerade,} \\ \dfrac{1}{\frac{\nu}{2}\cdot\frac{\nu-2}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}, & \text{wenn } \nu \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Es wird somit:

$$(15)\qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, e^{\pm\frac{\nu+1}{2}\pi i}\cdot\frac{2^{\frac{\nu}{2}}\pi}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)} z_1{}^{\nu} =$$

$$\pm i\pi\left(1-\frac{1}{1!}\frac{z_1{}^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z_1{}^2}{2}\right)^2-+\cdots\right)$$

$$-\sqrt{2\pi}\left(z_1-\frac{z_1{}^3}{1\cdot 3}+\frac{z_1{}^5}{1\cdot 3\cdot 5}-+\cdots\right).$$

Nun ist aber:

$$1-\frac{1}{1!}\frac{z_1{}^2}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z_1{}^2}{2}\right)^2-+\cdots = e^{-\frac{z_1{}^2}{2}};$$

ferner:

$$e^{\frac{z_1{}^2}{2}}\cdot\left(z_1-\frac{z_1{}^3}{1\cdot 3}+\frac{z_1{}^5}{1\cdot 3\cdot 5}-+\cdots\right)=z_1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)z_1{}^3+\cdots$$

$$+\left((-1)^{\nu}\cdot\frac{1}{1\cdot 3\cdots(2\nu+1)}+(-1)^{\nu-1}\frac{1}{2\cdot 1\cdot 3\cdots 2\nu-1}\right.$$

$$\left.+\cdots-\frac{1}{2\cdot 4\cdots(2\nu-2)}+\frac{1}{2\cdot 4\cdots 2\nu-2}\right)z_1{}^{2\nu+1}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und:

$$(-1)^{\nu}\cdot\frac{1}{1\cdot 3\cdots 2\nu+1}+(-1)^{\nu-1}\frac{1}{2\cdot 1\cdot 3\cdots 2\nu-1}$$

$$=(-1)^{\nu}\frac{1}{2\cdot 1\cdot 3\cdots(2\nu-5)(2\nu-3)\cdot(2\nu+1)},$$

Addiert man: $(-1)^{\nu-2}\cdot\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 1\cdot 3\cdots(2\nu-3)}$, so erhält man:

$$(-1)^{\nu}\cdot\frac{1}{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2\nu+1)}+(-1)^{\nu-1}\frac{1}{2\cdot 1\cdot 3\cdots 2\nu-1}$$

$$+(-1)^{\nu-2}\frac{1}{2\cdot 4\cdot 1\cdot 3\cdots(2\nu-3)}$$

$$=(-1)^{\nu-2}\frac{1}{2\cdot 4\cdot 1\cdot 3\cdots(2\nu-5)(2\nu+1)};$$

Addiert man weiter: $(-1)^{\nu-3}\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot1\cdot3\cdots(2\nu-5)}$, so erhält man:

$$(-1)^{\nu}\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu+1)}+\cdots$$
$$+(-1)^{\nu-3}\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot1\cdot3\cdots(2\nu-5)}$$
$$=(-1)^{\nu-3}\frac{1}{2\cdot4\cdot6\cdot1\cdot3\cdots(2\nu-7)(2\nu+1)}.$$

Man sieht leicht ein, dass dieser Prozess fortgesetzt schliesslich ergibt:

$$(-1)^{\nu}\cdot\frac{1}{1\cdot3\cdots(2\nu+1)}+\cdots\cdots+\frac{1}{2\cdot4\cdots2\nu}=\frac{1}{2\cdot4\cdots\cdot2\nu\cdot(2\nu+1)}$$

sodass man also erhält:

$$(16)\qquad e^{\frac{z_1^2}{2}}\cdot\left(z_1-\frac{z_1^3}{1\cdot3}+\frac{z_1^5}{1\cdot3\cdot5}-+\cdots\right)$$
$$=2\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\frac{1}{\nu!\,(2\nu+1)}\left(\frac{z_1^2}{2}\right)^{\nu+1}=\int_0^{z_1}e^{\frac{z_1^2}{2}}\,dz_1.$$

Wir erhalten somit entsprechend den Gleichungen (13)—(16):

$$(17)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{z_1^2}{2}}H_n(z)}{z_1-z}\,dz=\begin{cases}-\sqrt{2\pi}\left[z_1^{n-1}+\left(1-\frac{n(n-1)}{2}\right)z_1^{n-3}+\cdots\right.\\ \quad+\left((n-3)(n-5)\cdots3\cdot1\right.\\ \quad-\frac{n(n-1)}{2}(n-5)(n-7)\cdots3\cdot1+\cdots\\ \left.+(-1)^{\frac{n}{2}-1}(n-1)(n-3)\cdots3\cdot1\cdot\frac{n}{2}\right)z_1\Big]\\ -\sqrt{2\pi}\left[z_1^{n-1}+\left(1-\frac{n(n-1)}{2}\right)z_1^{n-3}+\cdots\right.\\ \quad+(n-2)(n-4)\cdots3\cdot1\\ -\frac{n(n-1)}{2}(n-4)(n-6)\cdots3\cdot1+\cdots\\ \left.\quad+(-1)^{\frac{n+1}{2}}n\cdot(n-2)\cdots3\cdot1\right]\end{cases}$$
$$\pm i\pi e^{-\frac{z_1^2}{2}}H_n(z_1)+\sqrt{2\pi}e^{-\frac{z_1^2}{2}}H_n(z_1)\int_0^{z_1}e^{\frac{z^2}{2}}\,dz,$$

je nachdem n $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist.

Das $\pm$ Zeichen ist zu wählen, je nachdem der Integrationsweg links den Nullpunkt unterhalb, bezw. oberhalb umläuft.

Nun fanden wir oben Gleichung (17):

$$K_n(z) = e^{\frac{z^2}{2}} R_{n-1}(z) + C_n H_n(z) \int_z^{\pm i\infty} e^{\frac{z^2}{2}} dz ,$$

wo $R_{n-1}(z)$ bis auf den Faktor $-C_n$ dieselbe ganze rationale Funktion vom $n-1$. Grade darstellt, die in (17) vorkommt.

Ferner ist:

$$\int_{z_1}^{\pm i\infty} e^{\frac{z^2}{2}} dz = \int_0^{\pm i\infty} e^{\frac{z^2}{2}} dz - \int_0^{z_1} e^{\frac{z^2}{2}} dz = \pm i\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{z_1} e^{\frac{z^2}{2}} dz ,$$

somit wird:

$$K_n(z) = e^{\frac{z^2}{2}} R_{n-1}(z) \pm i\sqrt{\frac{\pi}{2}} C_n H_n(z) - C_n H_n(z) \int_0^z e^{\frac{z^2}{2}} dz .$$

Hieraus folgt:

$$(18) \qquad J_n(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z)}{z_1 - z} dz$$

$$= e^{-\frac{z_1^2}{2}} H_n(z_1) \int_{z_1}^{\pm i\infty} \frac{e^{\frac{z^2}{2}} dz}{H_n(z)^2} = -e^{-\frac{z_1^2}{2}} K_n(z_1) ;$$

dabei ist in dem Integral rechts das $\pm$ Zeichen zu wählen, je nachdem $\Re(iz) \lesseqgtr 0$ ist, während der Integrationsweg des mittleren Integrals den Nullpunkt unterhalb bezw. oberhalb umläuft.

Aus der Darstellung (23):

$$J_n(z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z)}{z - z_1} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, n!} \sum_0^\infty{}_\nu \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z) \cdot \frac{z_1^\nu}{z^{\nu+1}} dz ,$$

wobei der Integrationsweg ausserhalb des Kreises $r = |z_1|$ verlaufen soll, können wir auch eine Darstellung der Funktionen $J_n(z_1)$ durch eine unendliche Reihe gewinnen. Setzt man nämlich:

$$e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z) = (-1)^n \frac{d^n\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right)}{dz^n},$$

so erhält man durch partielle Integration:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z)}{z^{\nu+1}} dz = (\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z^{n+\nu+1}} dz .$$

Nun ist nach Gleichung (26):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z^{n+\nu+1}} dz = e^{\pm \frac{n+\nu+1}{2} \pi i} \frac{2^{-\frac{n+\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+\nu+2}{2}\right)} \pi ,$$

wo das $\pm$ Zeichen zu wählen ist, je nachdem der Integrationsweg rechts den Nullpunkt unterhalb oder oberhalb umläuft. Daher wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z^{\nu+1}} dz = (-1)^n \cdot e^{\pm \frac{n+\nu+1}{2} \pi i} \cdot 2^{-\frac{n+\nu}{2}} \cdot \frac{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}{\Gamma\left(\frac{n+\nu+2}{2}\right)} \pi$$

$$= e^{\pm \frac{\nu-n+1}{2} \pi i} \cdot 2^{\frac{n+\nu}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} \sqrt{\pi}$$

und es wird somit:

$$(19)\quad J_n(z_1) = \frac{1}{n!} \sum_0^\infty {}_\nu\, e^{\pm \frac{\nu-n+1}{2} \pi i} \cdot 2^{\frac{n+\nu-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma(\nu+1)} z_1^{\nu},$$

wo das $\pm$ Zeichen gilt, je nachdem $\Re(i z_1) \lesseqgtr 0$ ist.

Anmerkung:

Die Funktionen

$$E_n(z_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z)}{z_1 - z} dz$$

genügen der gleichen Rekursionsformel wie die $H_n(z)$:

$$E_{n+1} - z_1 E_n + n E_{n-1} = 0 . \tag{20}$$

Differentiert man diese Gleichung zweimal:

$$E'_{n+1} - z_1 E'_n - E_n + n E'_{n-1} = 0 .$$

$$E''_{n+1} - z E'_n - z_1 E''_n + n E''_{n-1} = 0 ,$$

und ersetzt zunächst E''_{n+1}, E''_n, E''_{n-1} durch die entsprechenden aus der Differentialgleichung (9) sich ergebenden Werte, ferner E_{n+1} und E'_{n+1} durch die aus den vorhergehenden Gleichungen berechneten Werte, so erhält man:

$$E'_n = - z_1 E_n + n E_{n-1} . \tag{21}$$

§ 3.

Asymptotische Werte der Funktionen Hn, Jn, Kn.

Eine asymptotische Darstellung der Hermiteschen Polynome $H_n(z)$ liesse sich in derselben Weise wie im allgemeinen Falle[1]) aus der Differentialgleichung (2) bezw. (4) gewinnen; in einfacherer Weise hat sie G. Faber[2]) abgeleitet. Man findet so:

$$\begin{cases} H_{2\nu}(z) = (-1)^\nu 1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2\nu-1)\, e^{\frac{z^2}{4}} \left[\cos \sqrt{2\nu}\, z + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\nu}}\right)\right] \\ H_{2\nu+1}(z) = (-1)^\nu \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2\nu+1)}{\sqrt{2\nu+1}} e^{\frac{z^2}{4}} \\ \qquad\qquad \cdot \left[\sin \sqrt{2\nu+1}\, z + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\nu+1}}\right)\right] \end{cases} \tag{22}$$

Hieraus folgt:

$$|H_n(z)| \leqq |c_n| \cdot C \cdot |e^{\frac{z^2}{4}}| e^{\mp \sqrt{n}\, \Re(iz)} , \tag{23}$$

wo

$$\begin{aligned} 2\, c_{2\nu} &= (-1)^\nu\, 1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots (2\nu-1) \\ 2\, c_{2\nu+1} &= (-1)^\nu \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots (2\nu-1)\,(2\nu+1)}{\sqrt{2\nu+1}} , \end{aligned} \tag{24}$$

C eine positive, zwischen endlichen, von n unabhängigen Schranken gelegene Grösse bedeutet und das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $\Re(iz) \leqq 0$ ist.

---

[1]) Vergl. Math. Annal. Bd. 86 (1922). S. 302 ff.

[2]) G. Faber, Abschätzung von Funktionen grosser Zahlen. Sitzungsberichte der bayr. Akad. d. Wiss. math. phys. Kl. 1922. S 285—304 vergl bes. S. 295.

Mittels (18) ergibt sich hieraus:

$$(25) \qquad |K_n(z)| \leqq \frac{1}{|c_n|} \cdot C' \cdot |e^{\frac{z^2}{4}}| \, e^{\pm \sqrt{n}\, \Re(iz)},$$

$$(26) \qquad |J_n(z)| \leqq \frac{1}{|c_n|} \cdot C' \cdot |e^{-\frac{z^2}{4}}| \, e^{\pm \sqrt{n}\, \Re(iz)},$$

wo C' eine von n unabhängige, zwischen endlichen Grössen liegende positive Zahl bedeutet.

Analoge Formeln gelten für die Ableitungen.

§ 4.

Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen Funktionen.

1. Aus den Formeln (23) und (26) ergibt sich ohne weiteres die absolute und gleichmässige Konvergenz der zunächst rein formal angesetzten Entwicklung (8):

$$(8) \qquad \frac{1}{z_1 - z} = \sum_0^\infty n \, H_n(z) \, J_n(z_1),$$

so lange $|\Re(iz)| < |\Re(iz_1)|$. Da dies auch von den abgeleiteten Reihen gilt, so folgt:

Die Reihe $\sum_0^\infty n \, H_n(z) \, J_n(z_1)$ stellt eine analytische Funktion dar, nämlich $\frac{1}{z_1 - z}$, solange $|\Re(iz)| < \Re(iz_1)$.

2. Aus der fundamentalen Formel (8) ergeben sich mittels des Cauchyschen Integralsatzes die folgenden Sätze:

I. Sei $f(z)$ eine analytische Funktion von z innerhalb des Flächenstreifens $|\Re(iz_1)| = \beta_1$, die den Bedingungen genügt:

1) $\lim_{|z| \to \infty} |z^{-1} f(z)| = 0$, wenn $|\Re i(z)| \leqq \beta_1$.

2) Jedes der vier Integrale $\int_{\pm i\beta_1}^{\pm \infty \pm i\beta_1} z^{-1} \cdot f(z)\, dz$ ist

Mittels (18) ergibt sich hieraus:

$$(25) \qquad |K_n(z)| \leqq \frac{1}{|c_n|} \cdot C' \cdot |e^{\frac{z^2}{4}}| \, e^{\pm \sqrt{n}\, \Re(iz)},$$

$$(26) \qquad |J_n(z)| \leqq \frac{1}{|c_n|} \cdot C' \cdot |e^{-\frac{z^2}{4}}| \, e^{\pm \sqrt{n}\, \Re(iz)},$$

wo C' eine von n unabhängige, zwischen endlichen Grössen liegende positive Zahl bedeutet.

Analoge Formeln gelten für die Ableitungen.

§ 4.

Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Hermiteschen Funktionen.

1. Aus den Formeln (23) und (26) ergibt sich ohne weiteres die absolute und gleichmässige Konvergenz der zunächst rein formal angesetzten Entwicklung (8):

$$(8) \qquad \frac{1}{z_1 - z} = \sum_0^\infty n \, H_n(z) \, J_n(z_1),$$

so lange $|\Re(iz)| < |\Re(iz_1)|$. Da dies auch von den abgeleiteten Reihen gilt, so folgt:

Die Reihe $\sum_0^\infty n \, H_n(z) \, J_n(z_1)$ stellt eine analytische Funktion dar, nämlich $\frac{1}{z_1 - z}$, solange $|\Re(iz)| < \Re(iz_1)$.

2. Aus der fundamentalen Formel (8) ergeben sich mittels des Cauchyschen Integralsatzes die folgenden Sätze:

I. Sei $f(z)$ eine analytische Funktion von z innerhalb des Flächenstreifens $|\Re(iz_1)| = \beta_1$, die den Bedingungen genügt:

1) $\lim_{|z| \to \infty} |z^{-1} f(z)| = 0$, wenn $|\Re i(z)| \leqq \beta_1$.

2) Jedes der vier Integrale $\int_{\pm i\beta_1}^{\pm \infty \pm i\beta_1} z^{-1} \cdot f(z) \, dz$ ist

Dabei ist der Integrationsweg $\mathfrak{A}$ zu erstrecken über die Geraden $\Re(iz) = \pm \beta_1$, der Integrationsweg $\mathfrak{J}$ über die Geraden $\Re(iz) = \pm \beta$, und zwar je in positivem Sinne.

3) Aus dem Satz II ergeben sich die folgenden Integraleigenschaften der Hermiteschen Funktionen:

$$\int_{\mathfrak{J}} H_m(z)\, J_n(z)\, dz = \begin{cases} 0 \\ 2\pi i \end{cases} \quad \text{für} \quad \begin{cases} m \neq n \\ m = n \end{cases} \tag{27}$$

$$\int_{\mathfrak{A}} J_m(z)\, J_n(z)\, dz = 0 \quad \text{für} \quad m \gtrless n\,. \tag{28}$$

§ 5.

Beispiele.

Wir geben noch einige Beispiele, die teilweise bereits von Kapteyn [1]) (aber nur für reelle Veränderliche und rein formal) betrachtet sind.

1. $f(z) = \sin(\alpha z)$ (α eine beliebige reelle oder komplexe Zahl).

Da $f(z)$ die Bedingungen des Satzes I erfüllt, ist die Möglichkeit der Entwicklung sichergestellt und zwar für das Innere eines beliebigen Parallelstreifens $\Re(iz) = \pm \beta$. Die Koeffizienten der Entwicklung berechnet man in einfacherer Weise aus:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n!}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{4}} \sin(\alpha z)\, H_n(z)\, dz\,.$$

11330

Hieraus folgt unmittelbar:

$$a_{2\nu+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{(2\nu+1)!} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \sin(\alpha z)\, H_{2\nu+1}(z)\, dz$$

$$a_{2\nu} = 0$$

Mittels (1) und partieller Integration ergibt sich:

$$a_{2\nu+1} = (-1)^{\nu+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \int_0^{\infty} \sin(\alpha z) e^{-\frac{z^2}{2}} dz = (-1)^{\nu} \frac{\alpha^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

und somit:

[1]) l. c. 1st. ged.

Vilniaus II-ji Viešoji Valstybinė Biblioteka

$$(29)\qquad \sin(\alpha z) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{0}^{\infty} {}_{\nu} (-1)^{\nu} \cdot \frac{\alpha^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} H_{2\nu+1}(z),$$

eine Entwicklung, die für alle endlichen Werte von z gültig ist. In analoger Weise ergibt sich:

$$(30)\qquad \cos(\alpha z) = e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \sum_{0}^{\infty} {}_{\nu} (-1)^{\nu} \frac{\alpha^{2\nu}}{(2\nu)!} H_{2\nu}(z).$$

Wählt man als Integrationsweg die Parallelen $\Re(z) = \pm \beta$, so erkennt man, dass die Entwicklungen (21) und (22) auch für rein imaginäre α gültig bleiben und daher auch für beliebige komplexe α.

$$2.\qquad f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\, e^{\frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{(\alpha-\vartheta z)^2}{1-\vartheta^2}\right)},$$

(α eine beliebige reelle oder komplexe Zahl und $0 < \vartheta < 1$).

Die Funktion $f(z)$ erfüllt die Bedingungen des Satzes I; die Entwicklung ist also möglich für den Parallelstreifen $\Re(iz) = \pm \beta$. Für die Koeffizienten erhält man in der gleichen Weise wie vorhin:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\vartheta^2)}} \cdot \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{\alpha-\vartheta z}{1-\vartheta^2} - z^2\right)} H_n(z)\, dz$$

$$= \frac{\vartheta^n}{n!} H_n(\alpha)$$

und es ist:

$$(31)\qquad \frac{1}{\sqrt{1-\vartheta^2}} e^{\frac{1}{2}\left(\alpha^2 - \frac{(\alpha-\vartheta z)^2}{1-\vartheta^2}\right)} = \sum_{0}^{\infty} {}_{n} \frac{\vartheta^n}{n!} H_n(\alpha) H_n(z).$$

$$3.\qquad f(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z^m} \quad (m > 0 \text{ und ganz}).$$

$f(z)$ ist eine Funktion, die für alle endlichen Werte von z, abgesehen von $z = 0$, regulär ist. Sie erfüllt die Bedingungen des Satzes II. Es ist also:

$$(32)\qquad z^{-m} e^{-\frac{z^2}{2}} = \sum_{0}^{\infty} {}_{n} a_n H_n(z) + \sum_{0}^{\infty} {}_{n} b_n J_n(z),$$

wo:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} z^{-m}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}} J_n(z)\,dz\,,\quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{B}} z^{-m} e^{-\frac{z^2}{2}} H_n(z)\,dz\,.$$

Es ergibt sich unmittelbar:

$$(33)\quad b_n = (-1)^{m-1}\frac{1}{(m-1)!}H_{m+n-1}(o)$$

$$= \begin{cases} o & \text{für } m+n-1 \text{ ungerade,} \\ (-1)^{\frac{n-m+1}{2}}\cdot\dfrac{1\cdot 3\cdots(m+n-2)}{(m-1)!} & \text{für } m+n-1 \text{ gerade.} \end{cases}$$

Bei Beachtung der Gleichung (18) und Berücksichtigung der Formel:

$$\int_{+\infty}^{-\infty} z^{\nu-1}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz = \frac{2^{-\frac{\nu}{2}} e^{\pm\frac{\nu+1}{2}\pi i}}{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)}\cdot\pi\,,$$

wo das $\pm$ Zeichen zu wählen ist, je nachdem der Nullpunkt in der unteren bezw. oberen Halbebene umkreist wird, erhält man:

$$(34)\quad a_n = e^{\frac{1}{2}(n-m)\pi i}\, 2^{\frac{m+n-1}{2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma(m)}\sqrt{\pi}\,.$$

II. Die Laguerreschen Funktionen.

§ 1.

Die Laguerreschen Polynome.

Die Laguerreschen Polynome kann man definieren als die Koeffizienten in der Entwicklung der erzeugenden Funktion $\frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{1-t}$ nach steigenden Potenzen von t, also durch die Gleichung[1]:

$$\frac{e^{-\frac{zt}{1-t}}}{1-t} = \sum_{0}^{\infty n} L_n(z)\, t^n . \tag{1}$$

Ihre explizite Darstellung lautet:

$$L_n(z) = \frac{e^z}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-z}\cdot z^n) = 1 - \binom{n}{1} z + \binom{n}{2}\frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{z^n}{n!} \tag{2}$$

Sie erfüllen die Rekursionsformeln:

$$\begin{cases} (n+1)L_{n+1} - (2n+1-z)L_n + n L_{n-1} = 0 \\ z L'_n = (n+1)(L_{n+1} - L_n) \\ L'_{n+1} - L'_n = -L_n \end{cases} \tag{3}$$

und sind Lösungen der Differentialgleichung:

$$z L''_n + (1-z) L'_n + n L_n = 0 . \tag{4}$$

Aus letzterer folgt sofort die Tatsache, dass $L_n(z) = 0$ nur einfache Wurzeln besitzt. Die Gleichung (4) kann auch in der Form geschrieben werden:

---

[1]) Vgl. Laguerre, Oeuvres, S. 428 ff; E. R. Neumann, Beiträge zur Kenntnis der Laguerreschen Polynome. Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. Bd. 30, S. 16 ff. R. Neumann, l. c. S. 104 ff. und G. Wiarda, Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome und zum Summationsproblem von Orthogonalsystemen. Crelle's Journal, Bd. 153, (1923) S. 50, wo sich auch weitere Literaturangaben finden.

$$\frac{d}{dz}(z e^{-z} L'_n) + n L_n e^{-z} = o . \tag{4a}$$

Hieraus ergibt sich die Integraleigenschaft der Polynome $L_n(z)$:

$$\int_o^\infty e^{-z} L_m(z) L_n(z)\, dz = \begin{cases} o , & \text{wenn } m \neq n , \\ 1 , & \text{wenn } m = n . \end{cases} \tag{5}$$

Durch die Laguerreschen Polynome kann jede ganze positive Potenz von z dargestellt werden. Man erhält:

$$(-1)^n \frac{z^n}{n!} = L_n(z) - \binom{n}{1} L_{n-1}(z) + \binom{n}{2} L_{n-2}(z) + \cdots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} L_1(z) + (-1)^n L_o(z) . \tag{6}$$

§ 2.

Die Laguerreschen Funktionen zweiter Art.

Die Differentialgleichung

$$z y'' + (1 - z) y' + n y = o \tag{6a}$$

hat ausser den Laguerreschen Polynomen noch eine zweite partikuläre Lösung. Da die determinierende Fundamentalgleichung (für die Entwicklung in der Umgebung des Nullpunktes) eine Doppelwurzel hat, so hat dieses zweite Integral eine logarithmische Unstetigkeit, und der Punkt $z = 0$ ist eine wesentlich singuläre Stelle. Bestimmt man dieses zweite Integral nach der bekannten Methode, so erhält man:

$$M_n(z) = L_n(z) \int_{-\infty}^{z} \frac{e^z}{z L_n(z)^2}\, dz . \tag{7}$$

Dabei ist der Integrationsweg so zu wählen, dass er die positive reelle Achse der Z-Ebene nicht trifft, da die Nullstellen von $L_n(z) = 0$ sämtlich reell und positiv sind[1]).

Wir zerlegen $\frac{1}{z L_n(z)^2}$ in Partialbrüche; sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ die Wurzeln von $L_n(z) = 0$, so erhält man:

$$\frac{1}{z L_n(z)^2} = \frac{1}{z} + \sum_1^n i \left(\frac{A_i}{(z-\alpha_i)^2} - \frac{A_i}{z-\alpha_i} \right),$$

[1]) Vgl. Laguerre, Oeuvres, I. S. 434 und R. Neumann, l. c. S. 16.

wo ist:

$$A_i = \frac{1}{\alpha_i L'_n(\alpha_i)^2}.$$

Es wird daher:

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{e^z}{z L_n(z)^2} dz = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^z}{z} dz$$

$$+ \sum_1^n i A_i \int_{-\infty}^{z} \left[\frac{1}{(z-\alpha_i)^2} - \frac{1}{z-\alpha_i} \right] e^z dz .$$

Nun ist aber:

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{e^z}{(z-\alpha_i)^2} dz = -\frac{e^z}{z-\alpha_i} + \int_{-\infty}^{z} \frac{e^z}{z-\alpha_i} dz ,$$

daher:

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{e^z}{z L_n(z)^2} dz = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^z}{z} dz - e^z \sum_1^n i \frac{A_i}{z-\alpha_i} .$$

und folglich:

$$(8) \qquad M_n(z) = L_n(z) \int_{-\infty}^{z} \frac{e^z}{z} dz - e^z \sum_1^n i \frac{A_i}{z-\alpha_i} L_n(z) .$$

Die Laguerresche Funktion zweiter Art lässt sich also darstellen als eine ganze rationale Funktion n—1. Grades, multipliziert mit e^z und einem Produkt aus $L_n(z)$ und dem Integrallogarithmus[1]). Der Integrationsweg kann jetzt insofern allgemeiner sein, als er nur den Nullpunkt nicht passieren darf.

Um die ganze rationale Funktion $\sum_1^n i \frac{A_i}{z-\alpha_i} L_n(z)$ zu be-

[1]) Vgl. auch Laguerre, Oeuvres, I. S. 430.

stimmen, setzen wir:

$$(9)\qquad y=(a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_{n-1}z^{n-1})\,e^z+L_n(z)\int_{-\infty}^{z}\frac{e^z}{z}\,dz$$

in (4a) ein. Wir erhalten:

$$(10)\qquad z\,y''+(1-z)\,y'+n\,y=(n+1)\,a_0+a_1+\left((n+2)\,a_1+4a_2\right)z$$
$$+\cdots+\left((n+\nu+1)\,a_\nu+(\nu+1)^2a_{\nu+1}\right)z^\nu$$
$$+2n\,a_{n-1}\,z^{n-1}+2\,L'_n(z).$$

Es ist nun:

$$L'_n(z)=\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}\frac{z}{1!}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}+(-1)^n\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}$$

y ist daher eine Lösung von (4a), wenn in (10) der Ausdruck rechts, der eine ganze rationale Funktion vom Grade $n-1$ ist, identisch verschwindet; man erhält so für die a_ν die Bedingungsgleichungen:

$$(11)\qquad\begin{cases}a_{n-1}=(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n!}\\[2ex](n+\nu+1)\,a_\nu+(\nu+1)^2a_{\nu+1}+(-1)^{\nu+1}\dfrac{2}{\nu!}\binom{n}{\nu+1}=0,\\[2ex]\qquad\nu=0,1,2\cdots n-2.\end{cases}$$

Hieraus ergibt sich:

$$a_{n-2}=(-1)^{n-2}\frac{n^2-1}{n!}=(-1)^{n-2}\binom{n}{1}\frac{1}{(n-1)!}+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

und, wie man mittels der vollständigen Induktion leicht einsieht:

$$(12)\qquad a_\nu=(-1)^\nu\binom{n}{\nu+1}\cdot\frac{1}{(\nu+1)!}+(-1)^{\nu+1}\binom{n}{\nu+2}\frac{1!}{(\nu+2)!}$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(n-\nu-1)!}{n!}.$$

Setzt man nämlich diesen Wert für a_ν in (11) ein, so erhält man für $a_{\nu-1}$:

$$(n+\nu)\,a_{\nu-1}=-\nu^2a_\nu-(-1)^\nu\binom{n}{\nu}\frac{2}{(\nu-1)!}$$
$$=(-1)^{\nu-1}\binom{n}{\nu+1}\frac{\nu^2}{(\nu+1)!}+(-1)^{\nu-2}\binom{n}{\nu+2}\frac{\nu^2}{(\nu+2)!}+\cdots$$
$$+(-1)^{\nu-1}\frac{(n-\nu+1)!}{n!}\nu^2+(-1)^{\nu-1}\binom{n}{\nu}\frac{2}{(\nu-1)!}.$$

Schreibt man im ersten Gliede $\nu^2 = (\nu+1)^2 - (2\nu+1)$, im zweiten $\nu^2 = (\nu+2)^2 - 4\nu - 4$ u. s. w. und addiert zu dem von $(\nu+1)^2$ herrührenden Teil des ersten Gliedes das letzte, während man den andern Teil zu dem ersten Teile des zweiten Gliedes addiert u. s. w., so erhält man:

$$(n+\nu)\,a_{\nu-1} = (n+\nu)\cdot\left[(-1)^{\nu-1}\binom{n}{\nu}\frac{1}{\nu!} + (-1)^{\nu}\binom{n}{\nu+1}\frac{1!}{(\nu+1)!} + \cdots + (-1)^{n}\frac{(n-\nu)!}{n!}\right],$$

woraus die allgemeine Gültigkeit der Gl. (12) folgt. Wir erhalten somit:

$$(8a)\quad M_n(z) = (a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1})e^z + L_n(z)\int_{-\infty}^{z}\frac{e^z}{z}\,dz,$$

wo die a_ν durch (12) bestimmt sind.

Die Funktion $R_{n-1}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$ kann auch durch eine Summe von Laguerreschen Polynomen dargestellt werden. Setzt man nämlich

$$R_{n-1}(z) = b_0 L_0(z) + b_1 L_1(z) + \cdots + b_{n-1} L_{n-1}(z)$$

in (10) ein und ersetzt $L_\nu''(z)$ und $L_\nu'(z)$ durch die entsprechenden Werte aus (3) und (4), beachtet ferner, dass nach der zweiten Formel ist:

$$L'_n(z) = -L_{n-1}(z) - L_{n-1}(z) - \cdots - L_0(z),$$

so erhält man für die Koeffizienten b_ν:

$$b_{n-1} = \frac{1}{n},\quad (n+\nu+1)\,b_\nu - 2(\nu+1)\,b_{\nu+1} = 2;$$

$$b_{n-2} = \frac{2}{n}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$b_\nu = \frac{2}{(n+\nu+1)}\cdot\left[1 + \frac{2\nu+2}{n+\nu+2} + \frac{(2\nu+2)(2\nu+4)}{(n+\nu+2)(n+\nu+3)} + \cdots + \frac{(2\nu+2)(2\nu+4)\cdots(2n-2)}{(n+\nu+2)(n+\nu+3)\cdots 2n}\right].$$

Man erhält also:

$$M_n(z) = \left(b_0 L_0(z) + b_1 L_1(z) + \cdots + b_{n-1} L_{n-1}(z)\right)e^z + L_n(z)\int_{-\infty}^{z}\frac{e^z}{z}\,dz.$$

Die Funktion $R_{n-1}(z)$ genügt auch, wie aus den später folgenden Gl. (18) und (20) hervorgeht, derselben Rekursionsformel wie $L_n(z)$:

$$(n+1)\,R_n(z) - (2n+1-z)\,R_{n-1}(z) + n\,R_{n-2}(z) = 0\,,$$

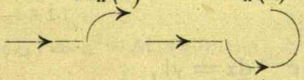
wo

$$R_{-2} = R_{-1} = 0\,,\quad R_0 = 1$$

zu setzen ist.

Aus der Darstellung (8a) erkennt man unmittelbar die Abhängigkeit von $M_n(z)$ vom Integrationsweg. Je nachdem der Nullpunkt oberhalb oder unterhalb umkreist wird, unterscheiden sich die sich ergebenden Werte um $2\pi i L_n(z)$, und es ist:

(8b) $$M_n(z) = M_n(z) - 2\pi i\,L_n(z)$$



§ 3.

Die den Laguerreschen Polynomen zugeordneten Funktionen.

1. Darstellung der zugeordneten Funktionen.

Entwickelt man (zunächst rein formal) $(z_1 - z)^{-1}$ in eine nach den Laguerreschen Polynomen fortschreitende Reihe, so erhält man:

(13) $$\frac{1}{z_1 - z} = \sum_{o}^{\infty} {}_n\, L_n(z)\,N_n(z_1)\,,$$

wo $N_n(z_1)$ der Differentialgleichung zu genügen hat:

(14) $$z_1 N''_n + (1 + z_1)\,N'_n + (n+1)\,N_n = o\,.$$

Macht man die Substitution:

(15) $$N_n = e^{-z_1} \cdot u_n\,,$$

so geht (14) über in die Differentialgleichung (4a):

(4a) $$z_1\,u''_n + (1 - z_1)\,u'_n + n\,u_n = o\,.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Reihe (13) gliedweise integriert werden darf, erhält man aus (13) mit Rücksicht auf die Formel (5):

(16) $$N_n(z_1) = \int_{o}^{\infty} \frac{e^{-z}\,L_n(z)}{z_1 - z}\,dz\,,$$

wobei der Integrationsweg so geführt sein soll, dass er den Punkt z_1 nicht trifft.

Es ist dann:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} L_n(z)}{z_1 - z}\,dz = \int_0^\infty e^{-z} \frac{L_n(z) - L_n(z_1)}{z_1 - z}\,dz + L_n(z_1) \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{z_1 - z}\,dz.$$

Nun ist aber:

$$\frac{L_n(z) \quad L_n(z_1)}{z_1 - z} = \binom{n}{1} - \binom{n}{2}\frac{1}{2!}(z_1 + z) + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}(z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z + \cdots + z^{n-1});$$

ferner:

$$\int_0^\infty z^\nu e^{-z}\,dz = \nu!,$$

wo der Integrationsweg wieder ganz beliebig sein kann; daher wird:

$$\int_0^\infty e^{-z} \frac{L_n(z) - L_n(z_1)}{z_1 - z}\,dz = \begin{cases} \binom{n}{1} - \binom{n}{2}\frac{1!}{2!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!} \\ + \left(-\binom{n}{2}\frac{1}{2!} + \binom{n}{3}\frac{1!}{3!} - + \cdots + \right. \\ \left. (-1)^{n-1}\frac{(n-2!)}{n!}\right) z_1 \\ + \left(\binom{n}{3}\frac{1}{3!} - \binom{n}{4}\frac{1!}{4!} + \cdots\cdots + \right. \\ \left. (-1)^{n-1}\frac{(n-3)!}{n!}\right) z_1^2 \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \left((-1)^{n-2}\binom{n}{n-1}\frac{1}{(n-1)!} + \right. \\ \left. (-1)^{n-1}\frac{1!}{n!}\right) z_1^{n-2} + (-1)^n \frac{1}{n!} z_1^{n-1}. \end{cases}$$

Endlich ist:

$$(17) \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{z_1 - z}\,dz = e^{-z_1} \int_{-\infty}^{z_1} \frac{e^t}{t}\,dt,$$

wo der Integrationsweg den Nullpunkt nicht treffen darf. Es wird somit:

$$(18)\qquad \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} L_n(z)}{z_1 - z}\, dz = R_{n-1}(z) + e^{-z_1} L_n(z_1) \int_{-\infty}^{z_1} \frac{e^t}{t}\, dt,$$

wo $R_{n-1}(z)$ dieselbe ganze rationale Funktion darstellt, die wir oben in § 2, (12) erhalten haben. Aus (18) erhalten wir somit den Satz:

Die den Laguerreschen Polynomen zugeordneten Funktionen setzen sich zusammen aus einer ganzen rationalen Funktion vom Grade n—1 und einem Produkt aus dem Integrallogarithmus und dem Ausdruck $e^{-z_1} L_n(z_1)$ und es ist:

$$(19)\qquad N_n(z_1) = e^{-z_1} M_n(z_1) = a_0 + a_1 z_1 + \cdots + a_{n-1} z_1^{n-1} + e^{-z_1} L_n(z_1) \int_{-\infty}^{z_1} \frac{e^z}{z}\, dz,$$

wo die Koeffizienten durch (12) bestimmt sind, und der Integrationsweg den Nullpunkt nicht treffen darf.

2. Rekursionsformeln.

Aus der Darstellung (16)

$$(16)\qquad N_n(z_1) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} L_n(z)}{z_1 - z}\, dz$$

erkennt man sofort, dass $N_n(z_1)$ die erste Rekursionsformel (3) von $L_n(z)$ erfüllt, dass also gilt:

$$(20)\qquad (n+1) N_{n+1} - (2n+1-z_1) N_n + n N_{n-1} = 0.$$

Differentiiert man diese Gleichung zweimal, setzt für die zweiten Differentialquotienten aus (4a) die entsprechenden Werte ein, so erhält man:

$$(n+1)\left(-(1+z_1) N'_{n+1} - n + 2) N_{n+1}\right) + (2n+1-z_1)\left(-(1+z_1) N'_n - (n+1) N_n\right) + n\left(-(1+z_1) N_{n-1} - n N_{n-1}\right) + 2 z_1 N'_n = 0$$

und hieraus, wenn man noch aus der Gl. (20) bezw. aus der differentiierten Gl. (20) für $(2n+1-z_1) N_n$ und $(2n+1-z_1) N'_n$ die entsprechenden Werte einsetzt:

$$-(n+1) N_{n+1} + n N_{n-1} + 2 z_1 N'_n + (1+z_1) N_n = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung für N_{n+1} seinen Wert aus (20) ein, so erhält man:

$$z_1 N'_n = (n - z_1) N_n - n N_{n-1}. \tag{21}$$

Aus dieser Formel erhält man durch Differentiation und bei Berücksichtigung der Gleichung (14):

$$N_n = N'_{n-1} - N'_n. \tag{22}$$

§ 4.

Asymptotische Darstellung der Laguerreschen Funktionen.

Eine asymptotische Darstellung der Laguerreschen Polynome liesse sich wie im allgemeinen Falle bei endlichen Grenzen nach der Sturm-Liouvilleschen Methode gewinnen; in anderer Weise hat sie G. Faber[1]) abgeleitet. Es ergibt sich:

$$L_n(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{nz}} e^{\frac{z}{2} + 2i\sqrt{zn}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right] \tag{23}$$

wenn z nicht gleichzeitig reell und positiv ist[2]).

Hieraus folgt:

$$|L_n(z)| \leqq \frac{C}{2\sqrt{\pi}\sqrt[4]{n}} \left| \frac{e^{\frac{z}{2}}}{\sqrt[4]{z}} \right| e^{2\sqrt{n}\,\Re(i\sqrt{z})}, \tag{24}$$

wo C eine positive, zwischen endlichen, von n unabhängigen Schranken gelegene Grösse bedeutet. Mittels der Formel (7) und (19) folgt hieraus:

$$|M_n(z)| \leqq 2\sqrt{\pi}\, C_1 \sqrt[4]{n} \left| \frac{e^{\frac{z}{2}}}{\sqrt[4]{z}} \right| e^{-2\sqrt{n}\,\Re(i\sqrt{z})} \tag{25}$$

$$|N_n(z)| \leqq 2\sqrt{\pi}\, C_1 \sqrt[4]{n} \left| \frac{e^{\frac{z}{2}}}{\sqrt[4]{z}} \right| e^{-2\sqrt{n}\,\Re(i\sqrt{z})} \tag{26}$$

wo C_1 ebenfalls eine positive, von n unabhängige Grösse bedeutet.

Analoge Formeln ergeben sich für die Ableitungen der Funktionen $L_n(z)$, $M_n(z)$ und $N_n(z)$.

---

[1]) G. Faber, l. c. S. 297 ff.

[2]) Ist z reell und positiv, so tritt an die Stelle von $e^{2i\sqrt{zn}}$ $2\cos\left(2\sqrt{nz} - \frac{\pi}{4}\right)$.

§ 5.

Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Laguerreschen Funktionen.

1. Mittels der Formeln (24) und (26) folgt unmittelbar:

Die Reihe (13) $\dfrac{1}{z_1 - z} = \sum_0^\infty n\, L_n(z)\, M_n(z_1)$ konvergiert absolut und gleichmässig, solange $o \leqq \Re(i\sqrt{z}) < \Re(i\sqrt{z_1})$ ist.

Da dasselbe auch von ihren Ableitungen gilt, so folgt:

Die Reihe (13) stellt eine analytische Funktion, nämlich $\dfrac{1}{z_1 - z}$ dar, solange $o \leqq \Re(i\sqrt{z}) < \Re(i\sqrt{z_1})$ ist.

2. Durch die Substitution:

$$t = 2\sqrt{z}$$

wird die T-Ebene auf die doppelt gelagerte Z-Ebene abgebildet. Wir haben zu untersuchen, was für Kurven in der Z-Ebene den Geraden $\Re(i\sqrt{z}) = \beta > 0$ entsprechen. Man erhält ($z = x + iy$ gesetzt):

$$y^2 = \beta^2 \left(x + \frac{\beta^2}{4}\right), \tag{27}$$

d. h. der Schar der Parallelen zur reellen Achse in der T-Ebene entspricht in der Z-Ebene die Parabelschar (27).

Aus der Formel (13) erhält man nun mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes folgende Sätze:

1) Es sei $f(z)$ eine willkürliche reguläre Funktion von z innerhalb der Parabel $\Re(2i\sqrt{z_1}) = \beta_1 > 0$, die ausserdem noch die weiteren Bedingungen erfüllt:

1. $\lim_{z \to \infty} \left(f(z) \cdot z^{-1}\right) = o$, wenn $\Re(2i\sqrt{z}) \leqq \beta_1$.

2. Jedes der Integrale $\int \dfrac{f(z)}{z}\, dz$ erstreckt über den oberen oder unteren Parabelbogen $\Re(2i\sqrt{z}) = \beta_1$, konvergiert absolut.

Wählen wir nun als Integrationsweg L die Parabel $\Re(2i\sqrt{z_1}) = \beta_1$, dann ist:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(z_1)}{z_1 - z}\, dz_1 = f(z), \tag{28}$$

folglich nach (13), da die gliedweise Integration erlaubt ist:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{o}^{\infty n} L_n(z)\int_L N_n(z_1)\,f(z_1)\,dz_1 = f(z)\,.$$

Da (28) beliebig oft nach z differentiiert werden darf, so folgt, dass auch die Entwicklung gilt:

$$(29)\qquad \frac{1}{2\pi i}\sum_{o}^{\infty n} \frac{d^p L_n(z)}{dz^p}\int_L N_n(z_1)\,f(z_1)\,dz_1 = \frac{d^p f(z)}{dz^p}\,.$$

Wir erhalten also den Satz:

I. Für jede reguläre Funktion f(z), die die Bedingungen 1. und 2. erfüllt, existiert die Entwicklung:

$$f(z) = a_o L_o(z) + a_1 L_1(z) + \cdots\cdots$$

welche für alle Punkte innerhalb des von der Parabel $\Re(2i\sqrt{z}) = \beta_1$ begrenzten Flächenstückes gültig ist. Jede solche Entwicklung kann beliebig oft nach z differentiiert werden.

Die Koeffizienten der Entwicklung sind gegeben durch:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L N_n(z_1)\,f(z_1)\,dz_1\,.$$

2) f(z) sei eine willkürliche reguläre Funktion innerhalb des von den beiden Parabeln $\Re(2i\sqrt{z_1}) = \beta_1 > o$, $\Re(2i\sqrt{z_o}) = \beta_o > o$ begrenzten Flächenstückes, die die obigen Bedingungen 1. und 2. erfüllt, und die weitere, dass die Integrale $\int f(z)\,L_n(z)\,dz$, erstreckt über die Parabel $\Re(2i\sqrt{z}) = \beta_o$, absolut konvergieren. Wählen wir die beiden Parabeln $\Re(2i\sqrt{z_1}) = \beta_1$ ($\mathfrak{A}$) und $\Re(2i\sqrt{z_o}) = \beta_o$ ($\mathfrak{J}$) als Integrationsweg (positiver Sinn), so erhalten wir:

$$(30)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{A}} \frac{f(z_1)}{z_1 - z}\,dz_1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{J}} \frac{f(z_1)}{z - z_1}\,dz_1\,,$$

wo der Integrationsweg in beiden Integralen im positiven Sinne zu durchlaufen ist. Da im ersten Integrale $\Re(2i\sqrt{z}) < \Re(2i\sqrt{z_1})$ so kann hier gesetzt werden:

$$\frac{1}{z_1 - z} = \sum_0^\infty n \, L_n(z) \, N_n(z_1);$$

im zweiten Integrale ist $\Re(2i\sqrt{z}) > \Re(2i\sqrt{z_1})$; es ist also hier zu setzen:

$$\frac{1}{z_1 - z} = \sum_0^\infty n \, L_n(z_1) \, N_n(z).$$

Setzen wir diese Entwicklungen in (30) ein, so erhalten wir:

$$(31) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_0^\infty n \, L_n(z) \cdot \int_{\mathfrak{A}} f(z_1) \, N_n(z_1) \, dz_1$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_0^\infty n \, N_n(z) \int_{\mathfrak{J}} f(z) \, L_n(z_1) \, dz_1 .$$

Diese Darstellung bleibt gültig, solange z im Innern des von den beiden Parabeln $\Re(2i\sqrt{z_1}) = \beta_1$ und $\Re(2i\sqrt{z_0}) = \beta_0$ begrenzten Flächenstückes bleibt. Sie darf auch beliebig oft differentiiert werden. Wir erhalten also den Satz:

II. Für jede Funktion $f(z)$, welche innerhalb des von zwei Parabeln der Schar (27) begrenzten Flächenstückes regulär bleibt und die obigen Bedingungen erfüllt, gibt es eine Entwicklung:

$$f(z) = a_0 L_0(z) + a_1 L_1(z) + a_2 L_2(z) + \cdots\cdots$$
$$+ b_0 N_0(z) + b_1 N_1(z) + b_2 N_2(z) + \cdots\cdots$$

Jede solche Entwicklung kann beliebig oft nach z differentiiert werden. Die Koeffizienten der Entwicklung sind gegeben durch:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} f(z_1) \, N_n(z_1) \, dz_1 , \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{J}} f(z_1) \, L_n(z_1) \, dz_1 .$$

3) Aus dem Satz II erhält man für $f(z) = N_n(z)$:

$$(32) \qquad \int_{\mathfrak{J}} L_n(z) \, N_n(z) \, dz = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ 2\pi i & \text{für } m = n, \end{cases}$$

(33) $$\int_{\mathfrak{A}} N_m(z)\, N_n(z)\, dz = 0 \qquad \text{für } m \gtrless n .$$

§ 7.

Beispiele für die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Laguerreschen Funktionen.

Es sei

1) $$f(z) = e^{-z}$$

Die Koeffizienten der Entwicklung sind nach I:

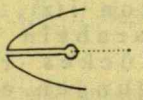
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{-z} N_n(z)\, dz = \int_0^\infty e^{-2z} L_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}} .$$

Denn es ist:

$$\int e^{-z} N_n(z)\, dz = \int e^{-z} N_n(z) - 2\pi i \int e^{-2z} L_n(z)\, dz ;$$

da

$$\int e^{-z} N_n(z)\, dz = 0 ,$$



so folgt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{-z} N_n(z)\, dz = \int e^{2z} \cdot L_n(z)\, dz = \int_0^\infty e^{-2z} L_n(z)\, dz = \frac{1}{2^{n+1}},$$

und es wird daher:

(34) $$e^{-z} = \sum_0^\infty n \frac{1}{2n+1} L_n(z)$$

2) $f(z) = \frac{e^{-z}}{z^m}$ · (m positiv und ganz).

Man erhält nach Satz II:

$$(35) \qquad f(z) = \sum_{0}^{\infty n} a_n L_n(z) + \sum_{0}^{\infty n} b_n N_n(z),$$

wo

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{A}} \frac{e^{-z}}{z^m} N_n(z)\, dz, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{F}} \frac{e^{-z}}{z^m} L_n(z)\, dz.$$

Nun ist:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{F}} \frac{e^{-z}}{z^m} L_n(z)\, dz = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}(e^{-z} L_n(z))}{dz^{m-1}} \Bigg| z = o,$$

also nach (2):

$$(36) \qquad b_n = \frac{1}{(m-1)!\, n!} \frac{d^{m+n-1}(e^{-z} z^n)}{dz^{m+n-1}} \Bigg|_{z=o}$$

Nun ist:

$$e^{-z} z^n = z^n - \frac{z^{n+1}}{1!} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{z^{m+n-1}}{(m-1)!} + \cdots\cdots$$

daher:

$$\frac{d^{m+n-1}(e^{-z} z^n)}{dz^{m+n-1}} \Bigg|_{z=o} = (-1)^{m-1} \frac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$$

folglich:

$$(37) \qquad b_n = (-1)^{m-1} \frac{(m+n-1)!}{((m-1)!)^2\, n!}.$$

Die Koeffizienten a_n lassen sich nicht so ohne weiteres auswerten. Wir wollen daher von einer weiteren Untersuchung absehen.

17924

Die Abbildung $\zeta = \frac{\sqrt{z^2-b^2} - \sqrt{z^2-c^2}}{\sqrt{c^2-b^2}}$

von Otto Volk in Kaunas.

P. F. von Lindemann šių lygčių pagelba konformį vaizdą

$$\zeta = \frac{\sqrt{z^2-b^2} - \sqrt{z^2-c^2}}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

kuomet b ir c realus. Čia žemiau tas pat tyriama tuo atveju, kuomet b ir c bus yvairios sudėties kompleksiniai skaičiai.

In seiner Arbeit: „Entwicklung der Funktionen einer komplexen Variablen nach Laméschen Funktionen und nach Zugeordneten der Kugelfunktionen[1]) hat Herr F. von Lindemann die durch die Beziehung:

$$\zeta = \frac{\sqrt{z^2-b^2} - \sqrt{z^2-c^2}}{\sqrt{b^2-c^2}} \tag{1}$$

vermittelte Abbildung für reelle Werte der Konstanten b und c untersucht. Im folgenden soll diese Abbildung für komplexe Werte dieser Konstanten studiert werden[2]).

1. Wie Herr von Lindemann gezeigt hat, können wir uns die Werte von ζ über der z-Ebene in einer vierblätterigen Riemannschen Fläche Z ausgebreitet denken, die über den Punkten $\pm b$ und $\pm c$ acht Verzweigungspunkte hat; der Zusammenhang der vierblätterigen Fläche Z ist gleich 3.

Breitet man die aus (1) durch Umkehrung erhaltenen Werte von z:

$$z = \frac{\sqrt{c^2-b^2}}{2} \sqrt{\zeta^2 + 2\,\frac{c^2+b^2}{c^2-b^2} + \zeta^{-2}} \tag{2}$$

über der ζ-Ebene aus, so erhält man eine zweiblätterige Fläche Z mit den vier Verzweigungspunkten:

$$\pm \sqrt{\frac{b+c}{b-c}} \quad \text{und} \quad \pm \sqrt{\frac{b-c}{b+c}}$$

---

[1]) Math. Annal. Bd. 19, (1882), S. 329 ff.

[2]) Diese Abbildung wird in einer Arbeit über die Entwicklung nach Laméschen Funktionen Anwendung finden.

Durch (1) bezw. (2) ist die vierblätterige Fläche Z auf die zweiblätterige Z konform abgebildet.

Die in Z vorkommenden Verzweigungen kann man im Falle komplexer Werte der Konstanten b und c in derselben Weise anordnen, wie es Herr von Lindemann für reelle Werte getan hat. Es sei z_0 ein Punkt der Hyperbel (9b) (Fig. 1), der zwischen B und C gelegen ist. Wir nehmen dann als erstes Blatt dasjenige, in welchem:

$$\zeta_0 = \frac{\sqrt{z_0^2 - b^2} - \sqrt{z_0^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}};$$

dabei sind $\sqrt{z_0 - b^2}$ und $\sqrt{z_0^2 - c^2}$ mit positivem Vorzeichen zu nehmen; $\sqrt{c^2 - b^2}$ soll immer positiv sein.

Im zweiten Blatte sei $\zeta_0 \sqrt{c^2 - b^2} = -\sqrt{z_0^2 - b^2} + \sqrt{z_0^2 - c^2}$,

„ dritten „ „ $\zeta_0 \sqrt{c^2 - b^2} = -\sqrt{z_0^2 - b^2} - \sqrt{z_0^2 - c^2}$,

„ vierten „ „ $\zeta_0 \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{z_0^2 - b^2} + \sqrt{z_0^2 - c^2}$.

Es hängen also zusammen:

die Blätter 1 und 3 in $\pm$ b,
„ „ 1 und 4 in $\pm$ c,
„ „ 2 und 3 in $\pm$ c,
„ „ 2 und 4 in $\pm$ b.

Nennt man die Punkte + b, + c, — b, — c bezw. B, C, B', C', die Schnittpunkte der Hyperbel (9b) mit der X-Achse, Y-Achse A, A', so kann man die Linien B A O A' B' (B A, B' A' Stücke der Hyperbel (9b)) und C ∞ C' auf der Hyperbel (9b) als Verzweigungsschnitte benützen, derart, dass man

durch Ueberschreiten von B A O A' B' vom 1. ins 3. Blatt
oder „ 2. „ 4. „
„ „ „ C ∞ C' „ 1. „ 4. „
oder „ 2. „ 3. „

gelangt und umgekehrt. Ein zweimaliger Umgang um die Linie B C oder B' C' gibt in der Fläche Z eine geschlossene Kurve.

Die beiden Blätter der Fläche Z gehen längs zweier Verzweigungsschnitte in einander über, von denen der eine die Punkte $+\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}$ und $+\sqrt{\frac{b+c}{b-c}}$, der andere die Punkte $-\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}$ und $-\sqrt{\frac{b+c}{b-c}}$ miteinander verbindet.

2. Wir wollen nun in der z-Ebene (also auf der Fläche Z) diejenigen Kurven betrachten, welche den durch den Anfangspunkt gehenden Geraden und um ihn als Mittelpunkt beschriebenen konzentrischen Kreisen entsprechen. Setzen wir:

$$(3)\qquad \begin{cases} z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ \zeta = \xi + i\eta = \varrho(\cos\omega + i\sin\omega) \end{cases}$$

und

$$(4)\qquad b = \alpha + i\beta\,,\quad c = m + in\,;$$

durch Trennen des Reellen und Imaginären erhalten wir dann aus (2):

$$(5)\qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = \dfrac{A}{2} + \dfrac{C}{4}(\varrho^2 + \varrho^{-2})\cos 2\omega - \dfrac{D}{2}(\varrho^2 - \varrho^{-2})\sin 2\omega \\ 2xy = B + \dfrac{D}{2}(\varrho^2 + \varrho^{-2})\cos 2\omega + \dfrac{C}{4}(\varrho^2 - \varrho^{-2})\sin 2\omega, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(6)\qquad \begin{cases} A = \alpha^2 + m^2 - \beta^2 - n^2\,, & B = \alpha\beta + mn\,, \\ C = \beta^2 + m^2 - \alpha^2 - n^2\,, & D = mn - \alpha\beta\,. \end{cases}$$

Durch Elimination von ϱ aus (5) ergibt sich:

$$(7)\qquad \left(\frac{C(x^2 - y^2 - \frac{A}{2}) + 2D(2xy - B)}{\cos 2\omega}\right)^2 - \left(\frac{-2D(x^2 - y^2 - \frac{A}{2}) + C(2xy - B)}{\sin 2\omega}\right)^2 = \left(\frac{C^2 + 4D^2}{2}\right)^2.$$

Diese Kurven 4. Ordnung in der z-Ebene entsprechen den in der ζ-Ebene durch den Anfangspunkt gezogenen Geraden.

Durch Elimination von ω aus (5) erhält man:

$$(8)\qquad \left(\frac{C(x^2 - y^2 - \frac{A}{2}) + 2D(2xy - B)}{\varrho^2 + \varrho^{-2}}\right)^2 + \left(\frac{-2D(x^2 - y^2 - \frac{A}{2}) + C(2xy - B)}{\varrho^2 - \varrho^{-2}}\right)^2 = \left(\frac{C^2 + 4D^2}{4}\right)^2.$$

Diese Kurven 4. Ordnung in der z-Ebene entsprechen den in der ζ-Ebene um den Anfangspunkt als Mittelpunkt geschlagenen Kreisen.

Wir untersuchen zunächst das System (7) näher. Für $\omega = o$ folgt aus (5) bezw. (7):

$$(9a)\quad \begin{cases} x^2 = \frac{A}{4} + \frac{C}{8}(\varrho^2+\varrho^{-2}) + \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{A}{2}+\frac{C}{4}(\varrho^2+\varrho^{-2})\right]^2+\left[B+\frac{D}{2}(\varrho^2+\varrho^{-2})\right]^2}, \\ y^2 = -\frac{A}{4} - \frac{C}{8}(\varrho^2+\varrho^{-2}) + \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{A}{2}+\frac{C}{4}(\varrho^2+\varrho^{-2})\right]^2+\left[B+\frac{D}{2}(\varrho^2+\varrho^{-2})\right]^2}, \end{cases}$$

bezw.

$$(9b)\qquad C(2xy - B) - 2D\left(x^2 - y^2 - \frac{A}{2}\right) = o.$$

Für $\varrho = 1$ wird $x = \pm m$, $y = \pm n$; für $\varrho = \begin{cases} o \\ \infty \end{cases}$ $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$; für $\varrho^2 + \varrho^{-2} = -\frac{2B}{D}$ oder $\varrho = \sqrt{\frac{-B+D}{2D}} \pm \sqrt{\frac{-B-D}{2D}}$ $x^2 = \frac{AD-BC}{2D}$, $y = o$ und $x = o$, $y^2 = \sqrt{\frac{-AD+BC}{2D}}$.

Für $\varrho^2 + \varrho^{-2} = -\frac{2A}{C}$ oder $\varrho = \sqrt{\frac{-A+C}{2C}} \pm \sqrt{\frac{-A-C}{2C}}$ $x^2 = y^2 = \pm\frac{BC-AD}{2C}$. Im ersten Falle ist ϱ reell, wenn $\frac{B}{D} \leqq -1$, im zweiten, wenn $\frac{A}{C} \leqq -1$; ist ausserdem $\frac{AD-BC}{D} \geqq o$, so ist der Schnittpunkt mit der X - bezw. Y - Achse reell, während man im 2. Falle immer reelle Werte für x und y erhalten kann. Während sich also in Z ein Punkt auf der Hyperbel (9b) von C oder C' nach dem Unendlichen so bewegt, dass er nicht über die Punkte B bezw. B' kommt, geht der entsprechende Punkt in Z auf der ξ - Achse von C oder C' ($\varrho = 1$) zum Anfangspunkt Ω; bewegt sich letzterer auf der ξ - Achse von C oder C' nach dem Unendlichen, so läuft der entsprechende Punkt in Z wieder auf der Hyperbel (9b) von C bezw. C' nach dem Unendlichen.

Ist $AD - BC = o$, so zerfällt (9b) in ein Geradenpaar, das durch O und die Punkte B, C geht. Da dieser Fall nur eintrifft, wenn $\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{\beta}$ oder $\frac{m}{n} = -\frac{\beta}{\alpha}$ ist, so fallen die beiden Geraden in eine Doppelgerade zusammen oder sie stehen aufeinander senkrecht. Ersteres tritt im Falle reeller Werte der Parameter b, c ein.

Ist $B = C = o$ d. h. $\alpha = m$, $\beta = -n$, sind also b, c konjugiert imaginär, so geht (9b) in eine gleichseitige Hyperbel über, die die Halbierungslinien der Quadranten zu Asymptoten hat.

Die für die besonderen Fälle eintretenden Modifikationen ergeben sich ohne weiteres aus dem für den allgemeinen Fall Gesagten.

Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir aus (5) bezw. (7):

$$(10)\quad \begin{cases} x^2 = \frac{A}{4} - \frac{C}{8}(\varrho^2+\varrho^{-2}) + \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{A}{2} - \frac{C}{4}(\varrho^2+\varrho^{-2})\right]^2 + \left[B - \frac{D}{2}(\varrho^2+\varrho^{-2})\right]^2}, \\ y^2 = -\frac{A}{4} + \frac{C}{8}(\varrho^2+\varrho^{-2}) + \frac{1}{2}\sqrt{\left[\frac{A}{2} + \frac{C}{4}(\varrho^2+\varrho^{-2})\right]^2 + \left[B\ \ \frac{D}{2}(\varrho^2+\varrho^{-2})\right]^2}, \end{cases}$$

bezw.

$$(9b)\qquad C\,(2xy - B) - 2D\,(x^2 - y^2 - \frac{A}{2}) = o\,.$$

$\varrho = 1$ gibt $x = \pm\alpha$, $y = \pm\beta$; $\varrho = \begin{cases} o \\ \infty \end{cases}$ $x = \pm\infty$, $y = \pm\infty$; für $\varrho^2 + \varrho^{-2} = \frac{2B}{D}$ oder $\varrho = \sqrt{\frac{B+D}{2D}} \pm \sqrt{\frac{B-D}{2D}}$ wird $x = \sqrt{\frac{AD-BC}{2D}}$, $y = o$ und $x = o$, $y = \sqrt{\frac{-AB+BC}{2D}}$; für $\varrho^2 + \varrho^{-2} = \frac{2A}{C}$ oder $\varrho = \sqrt{\frac{A+C}{2C}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2C}}$ wird $x^2 = y^2 = \frac{BC-AD}{2C}$. Im ersten Falle ist ϱ reell, wenn $\frac{B}{D} \geqq 1$, im 2., wenn $\frac{A}{C} \geqq 1$; ist noch $\frac{AD-BC}{D} > o$, so wird der Schnittpunkt mit der X-Achse reell; ist $\frac{AD-BC}{D} < o$, so der Schnittpunkt mit der Y-Achse. Bewegt sich also in Z ein Punkt auf der Hyperbel (9b) von B oder B' nach dem Unendlichen, sodass er C bezw. C' nicht trifft, so geht der entsprechende Punkt in Z auf der η-Achse von B bezw. B' ($\varrho = 1$) nach dem Anfangspunkt Ω oder nach $\pm i\infty$.

Für $\omega = \frac{\pi}{4}$ ergibt sich aus (5) bezw. (7):

$$(11a)\quad \begin{cases} x^2 = \frac{A - D(\varrho^2-\varrho^{-2})}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left[A - D(\varrho^2-\varrho^{-2})\right]^2 + \left[B + \frac{C}{4}(\varrho^2-\varrho^{-2})\right]^2}, \\ y^2 = -\frac{A + D(\varrho^2-\varrho^{-2})}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left[A - D(\varrho^2-\varrho^{-2})\right]^2 + \left[B + \frac{C}{4}(\varrho^2-\varrho^{-2})\right]^2}, \end{cases}$$

bezw.

$$(11b)\qquad C\,(x^2 - y^2 - \frac{A}{2}) + 2D\,(2xy - B) = o\,.$$

Die Kurven (7) arten also wieder in doppelt zu zählende gleichseitige Hyperbeln aus. Die Modifikationen für die bereits erwähnten Sonderfälle ergeben sich wie für $\omega = o$ auch für $\omega = \frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ leicht aus dem für den allgemeinen Fall Ge-

sagten. Es entspricht somit dem Radiusvektor $\omega = o$ die Linie $C\,\infty$ der gleichseitigen Hyperbel (9b), dem Radiusvektor $\omega = \frac{\pi}{4}$ der eine halbe Zweig der Hyperbel (11b) und dem Radiusvektor $\omega = \frac{\pi}{2}$ die Linie $B\,\infty$ der Hyperbel (9b). Je weniger ω von einem dieser 3 Werte verschieden ist, desto enger wird sich die entsprechende Kurve (7) einer jener speziellen Kurven anschliessen; hieraus lässt sich der ungefähre Verlauf der Kurven (7) erkennen. (Vergl. Fig. 3).

Da sich die Gleichung (7) nicht ändert, wenn man ω durch $\frac{\pi}{2} - \omega$ ersetzt, so sind je zwei symmetrisch gegen den Hyperbelast (11b) liegende Kurvenzweige als Teile derselben Kurve (7) zu betrachten. Jede Kurve hat 4 reelle Asymptoten, welche alle durch den Anfangspunkt gehen und bestimmt sind durch die Gleichung:

$$\left[(C\sin 2\omega - 2D\cos 2\omega)(x^2-y^2) + (4D\sin 2\omega + 2C\cos 2\omega)\,xy\right] \times$$
$$\left[(C\sin 2\omega + 2D\cos 2\omega)(x^2-y^2) + (4D\sin 2\omega - 2C\cos 2\omega)\,xy\right] = o$$

Für:

$$\cos 4\omega = \frac{A^2+4B^2 - \sqrt{[(A-C)^2+4(B-D)^2]\,[(A+C)^2+4(B+D)^2]}}{C^2+4D^2}$$
$$= \frac{(\alpha^2+\beta^2-m^2-n^2)^2 - 4(\beta m+\alpha n)^2}{(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2 - 4(\alpha m+\beta n)^2}$$

oder

$$\cos 2\omega = \frac{\alpha^2+\beta^2-m^2-n^2}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2 - 4(\alpha m+\beta n)^2}}$$

erhält man die Kurve:

$$(12)\quad \left\{\left[2C(\alpha n-\beta m) + 2D(\alpha^2+\beta^2-m^2-n^2)\right](x^2-y^2) - \left[2C(\alpha^2+\beta^2-m^2-n^2) - 8D(\alpha n-\beta m)\right]xy\right\}$$
$$\times\left\{\left[2C(\alpha n-\beta m) - 2D(\alpha^2+\beta^2-m^2-n^2)\right](x^2-y^2) + \left[2C(\alpha^2+\beta^2-m^2-n^2) - 8D(\alpha n-\beta m)\right]xy\right\}$$
$$- 4\left\{\left(2BD+\frac{AC}{2}\right)C(\alpha n-\beta m)^2 - (AD-BC)D(\alpha^2+\beta^2-m^2-n^2)^2\right\}(x^2-y^2)$$

$$-4\Big\{(2\,BD+\frac{AC}{2})\,D\,(\alpha n-\beta m)^2 + (AD-BC)\,C\,(\alpha^2+\beta^2-m^2-n^2)^2\Big\}\,xy=o,$$

die im Anfangspunkt einen Doppelpunkt besitzt.

Wir geben noch die Modifikationen für die Sonderfälle an.

1. Ist $AD-BC=o$, — was ja nur für $\frac{m}{n}=\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{m}{n}=-\frac{\beta}{\alpha}$ eintritt — so zerfällt die Hyperbel (9b) in das orthogonale Geradenpaar $L_1=\alpha y-\beta x=o$ und $L_2=\beta y+\alpha x=o$. Im einen Falle liegen B und C auf L_1, im andern B auf L_1, C auf L_2. Im ersten Falle, der dem Lindemannschen entspricht, entspricht dem Radiusvektor $\omega=o$ die Linie $C\infty$ der Geraden L_2, dem Radiusvektor $\omega=\frac{\pi}{4}$ der eine halbe Zweig der Hyperbel (11b), dem Radiusvektor $\omega=\frac{\pi}{2}$ die gebrochene Linie $BO-L_2\infty$. Der Kurve (12) entspricht das doppelt zu zählende Achsenpaar.

Im Falle $\frac{m}{n}=-\frac{\beta}{\alpha}$ entspricht dem Radiusvektor $\omega=o$ die Linie $C\infty$ der Geraden L_2; dem Radiusvektor $\omega=\frac{\pi}{4}$ der eine halbe Zweig der Hyperbel (11b), dem Radiusvektor $\omega=\frac{\pi}{2}$ die Linie $B\infty$ der Geraden L_2. Die Kurve (12) mit dem Doppelpunkt in O ergibt sich für $\cos 2\omega=\frac{\beta^2-m^2}{\beta^2-n^2}=\frac{\alpha^2-n^2}{\alpha^2+n_2}$.

2. Ist $AC+4BD=o$, d. h. $\alpha^2+\beta^2=m^2+n^2$, so zerfällt die Hyperbel (9b) in ein orthogonales Geradenpaar; die Kurve (12) zerfällt in die 4 Geraden:

$$y=\frac{\pm 2\,(mn-\alpha\beta)\pm\sqrt{(m^2+n^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\,(\alpha n-\beta n)^2}}{m^2+\beta^2-\alpha^2-n^2}\,x,$$

die zu je 2 aufeinander senkrecht stehen. Für konjugiert imaginäre Werte der b, c d. h. also für $\alpha=m$, $\beta=-n$ gehen diese Geraden in das doppelt zu zählende Achsenpaar über.

3. Wir untersuchen jetzt die Kurven (8). Sie verlaufen ganz im Endlichen.

Für $\varrho=1$ erhält man aus (5) bezw. (8):

$$(13)\quad \begin{cases} x^2=\frac{A}{4}+\frac{C}{4}\cos 2\omega+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\cos 2\omega\right)^2+\left(B+D\cos 2\omega\right)^2}, \\ y^2=-\frac{A}{4}-\frac{C}{4}\cos 2\omega+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\cos 2\omega\right)^2+\left(B+D\cos 2\omega\right)^2}, \end{cases}$$

(9b) $$C(2xy - B) - 2D(x^2 - y^2 - \frac{A}{2}) = o.$$

Insbesondere wird:

$$x^2 = \alpha^2,\ y^2 = \beta^2 \text{ für } \omega = \frac{\pi}{2},$$

$$x^2 = m^2,\ y^2 = n^2 \text{ für } \omega = o,$$

und bei der Voraussetzung, dass $m^2 + n^2 > \alpha^2 + \beta^2$:

$$\left.\begin{matrix} \frac{|AD - BC|}{\sqrt{C^2 + 4B^2}} \\ \alpha^2 + \beta^2 \end{matrix}\right\} \leqq x^2 + y^2 \leqq m^2 + n^2, \text{ je nachdem}$$

$$\left\{ |AC + 4BD| \leqq C^2 + 4D^2 \text{ ist.} \right.$$

Es entspricht also dem Kreisquadranten $\varrho = 1$ und $o < \omega < \frac{\pi}{2}$ in der ζ-Ebene das Stück der Hyperbel (9b), das zwischen B und C oder B' und C' liegt. Da sich Gleichung (8) nicht ändert, wenn man ϱ mit ϱ^{-1} vertauscht, so erhält man dieselbe Kurvenschar, wenn man ϱ von 1 bis o abnehmen, als wenn man ϱ von 1 bis ∞ wachsen lässt; wir lassen ϱ abnehmen. Ist ϱ von 1 wenig verschieden, so ergibt sich eine Kurve, die aus 2 kongruenten Ovalen besteht, die sich eng an die Stücke B C und B' C' der Hyperbel (9b) anschliessen. Diese Ovale werden, falls die Hyperbelstücke B C und B' C' die Achsen nicht treffen d. h. B, C und B', C' im gleichen Quadranten liegen, — was für $\alpha\beta\ mn > o$ oder $B^2 > D^2$ eintritt —, zunächst die Koordinatenaxen nicht treffen, bis sie bei kleiner werdendem ϱ die X- bezw. Y-Achse berühren. Der entsprechende Wert von ϱ ergibt sich, indem man die Diskriminante der später folgenden Gleichung (15) und gleichzeitig μ gleich Null, bezw. nach Einsetzen von $x = \frac{y}{\mu}$ $\mu = \infty$ setzt; man erhält:

$$\varrho = \sqrt{\sqrt{\frac{C^2 + 4B^2}{C^2 + 4D^2}} - 2\sqrt{\frac{B^2 - D^2}{C^2 + 4D^2}}},$$

ein Wert, der immer reell ist, und die Gleichung der Kurve lautet:

(14) $$\left\{ \frac{\left[C(x^2 - y^2 - \frac{A}{2}) + 2D(2xy - B)\right]^2}{C^2 + 4B^2} + \frac{\left[-2D(x^2 - y^2 - \frac{A}{2}) + C(2xy - B)\right]^2}{4(B^2 - D^2)} = \frac{C^2 + 4D^2}{4}. \right.$$

Wie man aus der Gl. (15) sofort sieht, gibt es nur ein solches Paar von Ovalen, die entweder nur die X-Achse oder nur die Y-Achse in reellen Punkten berühren.

Bei weiter abnehmendem ϱ vergrössern sich die Ovale immer mehr, bis sie schliesslich in eine Kurve mit einem einzigen Zuge übergehen, die in O einen Doppelpunkt hat. In der Tat bestimmen sich die 4 Schnittpunkte einer solchen Kurve mit der Geraden $y = \mu x$ aus der Gleichung:

$$(15)\quad \begin{cases} \left[(\varrho^2-\varrho^{-2})^2\left((1-\mu^2)\frac{C}{2}+2\mu D\right)^2+(\varrho^2+\varrho^{-2})^2\left((1-\mu^2)D-\mu C\right)^2\right]x^4 \\ +\left[(\varrho^2+\varrho^{-2})^2(AD-BC)\cdot\left(-(1-\mu^2)D+\mu C\right)\right. \\ \left.-\left(\frac{AC}{2}+2BD\right)\left(C(1-\mu^2)+4\mu D\right)\right]x^2+(\varrho^2-\varrho^{-2})^2\left(\frac{AC}{4}+BD\right)^2 \\ +(\varrho^2+\varrho^{-2})^2\frac{(AD-BC)^2}{4}-(\varrho^4-\varrho^{-4})^2\frac{(C^2+4D^2)^2}{64}=0. \end{cases}$$

Da

$$x_1^2x_2^2=\frac{(\varrho^2-\varrho^{-2})^2\left(\frac{AC}{4}+BD\right)+(\varrho^2+\varrho^{-2})^2(AD-BC)^2-(\varrho^4-\varrho^{-4})^2\frac{(C^2+4D^2)^2}{64}}{(\varrho^2-\varrho^{-2})^2\left((1-\mu^2)\frac{C}{2}+2\mu D\right)^2+(\varrho^2+\varrho^{-2})\left((1-\mu^2)D-\mu C\right)^2}$$

ist, und der Nenner immer positiv ist, so folgt hieraus, dass wir, abgesehen von dem bereits eben erwähnten Falle, 4 voneinander verschiedene reelle oder imaginäre, 2 reelle oder 2 imaginäre je mit der Doppelwurzel o, 2 reelle und 2 imaginäre Wurzeln erhalten, je nachdem:

$$(16)\quad (\varrho^2-\varrho^{-2})^2\left(\frac{AC}{4}+BD\right)^2+(\varrho^2+\varrho^{-2})(AD-BC)^2-(\varrho^4-\varrho^{-4})^2\frac{(C^2+4D^2)^2}{64}\gtrless 0$$

ist. Der Ausdruck (16) wird o, wenn:

$$\varrho^4+\varrho^{-4}=\frac{2\left[(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2+4(\alpha m+\beta n)^2\right]}{(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2-4(\alpha m+\beta n)^2}$$

oder

$$\varrho^2=\frac{\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2\pm 2(\alpha m+\beta n)}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2-4(\alpha m+\beta n)^2}}.$$

Für diese Werte von ϱ erhalten wir also eine lemniskatenartige Kurve mit gewöhnlichem Doppelpunkt im Anfangspunkt; ihre Gleichung ist:

$$(17)\quad 4\left\{C^2(\alpha m+\beta n)^2+D^2(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2\right\}(x^2-y^2)^2$$
$$+4\left\{16D^2(\alpha m+\beta n)^2+C^2(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2\right\}x^2y^2$$

$$+8CD\left\{-(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2+4(\alpha m+\beta n)^2\right\}xy(x^2-y)^2$$

$$-4\left\{C(AC+4BD)(\alpha m+\beta n)^2+D(AD\ \ BC)(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2\right\}(x^2-y^2)$$

$$-4\left\{4D(AC+4BD)(\alpha m+\beta n)^2-C(AD-BC)(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2\right\}xy=0.$$

Bei weiter abnehmendem ϱ bestehen die Kurven (8) ebenfalls aus einem einzigen Zuge, der jede Gerade durch den Anfangspunkt in je 2 reellen Punkten trifft. Für $\varrho = 0$ haben sie sich auf den unendlich fernen Punkt zusammengezogen. Das ganze System ist also gestaltlich dem Systeme konfokaler Cassinischer Kurven sehr ähnlich.

Ist nun $AD - BC = 0$, so geht das krummlinige Stück BC der Hyperbel (9b) in das geradlinige Stück BC $\left(\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{\beta}\right)$ bezw. in das gebrochene BOC $\left(\frac{m}{n} = -\frac{\beta}{\alpha}\right)$ über. Die Kurve (17) reduziert sich in letzterem Falle auf das doppelt zu zählende Stück BOC und B'OC' der beiden Geraden, in die (9b) zerfällt. Das System $\varrho = \text{const.}$ besteht aus lauter Kurven mit einem Zuge.

Der Fall $AC + 4BD = 0$ bringt für die Kurven (8) keine wesentliche Modifikation.

4. Zur Berechnung einzelner Punkte der Kurven (7) und (8) ist es vorteilhaft, Polarkoordinaten einzuführen. Man erhält aus (5):

$$(18)\quad \begin{cases} r^4 = \left[\frac{A}{2}+\frac{C}{4}(\varrho^2+\varrho^{-2})\cos 2\omega - \frac{D}{2}(\varrho^2-\varrho^{-2})\sin 2\omega\right]^2 \\ \quad +\left[B+\frac{D}{2}(\varrho^2+\varrho^{-2})\cos 2\omega + \frac{C}{2}(\varrho^2-\varrho^{-2})\sin 2\omega\right]^2 \end{cases}$$

und

$$(19)\quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B+\frac{D}{2}(\varrho^2+\varrho^{-2})\cos 2\omega+\frac{C}{4}(\varrho^2-\varrho^{-2})\sin 2\omega}{\frac{A}{2}+\frac{C}{4}(\varrho^2+\varrho^{-2})\cos 2\omega-\frac{D}{2}(\varrho^2-\varrho^{-2})\sin 2\omega}.$$

Für die Asymptoten der Kurven $\omega = \text{const.}$ erhält man aus (19) durch Einsetzen von $\varrho = 0$ bezw. $\varrho = \infty$:

$$(20a)\quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2D\cos 2\omega - C\sin 2\omega}{C\cos 2\omega + 2D\sin 2\omega}$$

bezw.

$$(20b)\quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2D\cos 2\omega + C\sin 2\omega}{C\cos 2\omega - 2D\sin 2\omega}.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (18), (19) und (20) sind die Kurven in Fig. 3 punktweise berechnet. Es ist daselbst gewählt:

$\alpha = \beta = 1$ cm, $m = 4$ cm, $n = 3$ cm. $(AD - BC > o,\ B^2 > D^2)$. Gezeichnet sind die Kurven $\varrho^2 = 1$ (Strecke BC und B'C' auf der Hyperbel (9b)) $\varrho^2 = 0{,}8$, $\varrho^2 = 0{,}75$, $\varrho^2 = 0{,}6$, $\varrho^2 = 0{,}54$ (je zwei Ovale), $\varrho^2 = \frac{9}{16}$ (Kurve mit Doppelpunkt), $\varrho^2 = \frac{1}{2}$, $\varrho^2 = \frac{3}{8}$, $\varrho^2 = \frac{1}{4}$, $\varrho^2 = \frac{1}{9}$ (einteilige Kurven), ferner aus der orthogonalen Schar die Kurven $\omega = \frac{\pi}{72}$ oder $\frac{35}{72}\pi$ (Kurve mit Doppelpunkt), $\omega = \frac{\pi}{32}$ oder $\frac{15}{32}\pi$, $\omega = \frac{1}{16}\pi$ oder $\frac{7}{16}\pi$, $\omega = \frac{1}{8}\pi$ oder $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{3}{16}\pi$ oder $\frac{5}{16}\pi$, die je aus 4 Zweigen bestehen, $\omega = \frac{1}{4}\pi$, eine doppelt zu zählende gleichseitige Hyperbel.

In Fig. 4 $(AD - BC = o)$ ist $b = 2$, $c = 6i$ $\left(\frac{m}{n} = -\frac{\beta}{\alpha}\right)$; in Fig. 5 $(AC + 4BD = o)$ sind b, c konjugiert imaginär $(c = 5 + 4i,\ b = 5 - 4i)$. In beiden Figuren sind alle Kurven wie im Lindemannschen Falle symmetrisch zu beiden Achsen, weshalb nur ein Quadrant aufgezeichnet ist.

5. Es ist noch zu untersuchen, wie die einzelnen Blätter und Flächenteile von Z sich auf Z abbilden.

Zu dem Zweck betrachten wir zunächst die Kurve in der ζ-Ebene, die den beiden Koordinatenaxen in der z-Ebene entspricht. Aus der zweiten Gleichung (5) erhält man für $x = o$ oder $y = o$:

$$(21) \qquad B + \frac{C}{4}(\varrho^2 - \varrho^{-2})\sin 2\omega + \frac{D}{2}(\varrho^2 + \varrho^{-2})\cos 2\omega = o,$$

woraus sofort folgt:

$$(21a) \qquad \varrho^2 = \frac{-\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} - \left(\frac{D}{2}\cos 2\omega - \frac{C}{4}\sin 2\omega\right)\left(\frac{D}{2}\cos 2\omega + \frac{C}{4}\sin 2\omega\right)}}{\frac{D}{2}\cos 2\omega + \frac{C}{4}\sin 2\omega}.$$

In rechtwinkligen Koordinaten lautet die Gleichung:

$$(21b) \qquad \left(D(\xi^2 - \eta^2) + C\xi\eta + 2B\right)(\xi^2 + \eta^2)^2 + D(\xi^2 - \eta^2) - C\xi\eta = o.$$

Das ist die Gleichung einer Kurve 6. Ordnung, die im Anfangspunkt einen Doppelpunkt hat mit den beiden Tangenten:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{C}{2D}$$

und die beiden Asymptoten besitzt:

$$\operatorname{tg} 2\omega = -\frac{C}{2D}.$$

Die Kurve besteht, falls $\left|\frac{B}{D}\right| > 1$, aus einem lemniskatenartigen geschlossenen Teil, der ganz innerhalb des Kreises $\varrho = 1$ verläuft, und 2 hyperbelartigen Ästen, die ausserhalb des Kreises $\varrho = 1$ verlaufen. Für:

$$\cos 2\omega = -\frac{D\sqrt{C^2+4B^2}}{B\sqrt{C^2+4D^2}}$$

$$= \frac{-mn+\alpha\beta}{mn+\alpha\beta}\sqrt{\frac{(m^2+n^2+\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha m+\beta n)^2}{(m^2+n^2+\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha m-\beta n)^2}}$$

nimmt ϱ die Extremalwerte:

$$\varrho = \sqrt{\sqrt{\frac{C^2+4B^2}{C^2+4D^2}} \pm 2\sqrt{\frac{B^2-D^2}{C^2+4D^2}}}$$

an. Auf dieser Kurve (21) liegen auch die Punkte:

$$\zeta = \pm\sqrt{\frac{b+c}{b+c}} = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta-m^2-n^2+2i(\alpha n-\beta m)}{(\alpha+m)^2+(\beta-n)^2}}$$

und

$$\zeta = \pm\sqrt{\frac{b-c}{b+c}} = \pm\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2-m^2-n^2-2i(\alpha n-\beta m)}{(\alpha+m)^2+(\beta+n)^2}},$$

deren Polarkoordinaten bestimmt sind durch (21a) und:

$$\cos 4\omega = \frac{(\alpha^2+\beta^2-m^2-n^2)^2-4(\beta m+\alpha n)^2}{(\alpha^2+\beta^2+m^2+n^2)^2-4(\alpha m+\beta n)^2},$$

und die dem Anfangspunkt in Z entsprechen. Wir bezeichnen sie mit O, O', O_1, O'_1; ferner seien A, A', A_1, A'_1 die Schnittpunkte der Kurve (21) mit der η- bezw. ξ-Achse, die den Schnittpunkten A, A' der Hyperbel (9b) mit der Y- bezw. X-Achse in der Fläche Z entsprechen. Wir wählen dann die gebrochenen Linien O'_1 A'_1 B' A' O' und O_1 A_1 B A O bezw. O'_1 A'_1 C' A' O' und O_1 A_1 C A O als Verzweigungsschnitte in der Z-Fläche.

Ist $\left|\frac{B}{D}\right| < 1$, so besteht die Kurve (21) aus 2 Zügen, die je die Begrenzung des Einheitskreises schneiden. Besondere Modifikationen treten aber nicht ein.

Nach den in 1. genannten Voraussetzungen entspricht einem Punkte z des ersten Blattes von Z, der auf der Strecke B C gelegen ist, ein Punkt:

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{\sqrt{z^2-b^2}-\sqrt{z^2-c^2}}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

wo alle Wurzelzeichen absolut zu nehmen sind. Es wird dann

für $z = c = m + i n$ $\xi = 1$, $\eta = o$; für $z = b = \alpha + i \beta$ $\xi = o$, $\eta = -1$; es entspricht somit dem betreffenden Punkt der Fläche Z ein Punkt des 4. Quadranten der Fläche Z, für den ω negativ und absolut $< \frac{\pi}{2}$ ist; dabei ist $\varrho = 1$; das Blatt, in welchem dieser Punkt liegt, soll als erstes Blatt der Fläche Z bezeichnet werden.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass b, c im gleichen Quadranten liegen und die Hyperbel (9b) die Y-Achse in reellen Punkten trifft.

Entsprechend den Bezeichnungen des Herrn von Lindemann wollen wir in der Fläche Z den oberhalb des durch B und C gehenden Hyperbelastes gelegenen Teil der Z-Ebene, für den x positiv ist, mit I/ bezeichnen, denjenigen, für den x negativ ist, mit II/; den von demselben Hyperbelaste, der negativen X-Achse und einem Teil der positiven Y-Achse eingeschlossenen Flächenteil mit III/, den von dem durch B' und C' gehenden Hyperbelaste, der negativen X-Achse und einem Teil der negativen Y-Achse eingeschlossenen Flächenteil mit IV/, den vom gleichen Hyperbelaste und der negativen Y-Achse begrenzten Flächenteil, für den x negativ ist, mit V/, für den x positiv ist, mit VI/, den vom gleichen Hyperbelaste, der positiven X-Achse und einem Teil der negativen Y-Achse eingeschlossenen Flächenteil mit VII/ und endlich den noch übrigen Flächenteil mit VIII/ bezeichnen; ein beigefügter unterer Index soll angeben, in welchem Blatte von Z der Flächenteil gedacht ist. In Z unterscheiden wir die Flächenteile in derselben Weise; hier teilen wir jeden Quadranten in vier Teile durch Einzeichnung des Kreises $\varrho = 1$ und der Kurve (21); die beiden Teile, die innerhalb des Kreises $\varrho = 1$ liegen, sollen durch den oberen Index i, die ausserhalb gelegenen mit dem oberen Index a bezeichnet werden; die an die Peripherie des Kreises $\varrho = 1$ stossenden Flächenteile sollen, beginnend mit dem 1. Quadranten $o - \frac{\pi}{2}$, bezw. mit $I/^i$, $I/^a$, $IV/^i$, $IV/^a$, $V/^i$, $V/^a$, $VIII/^i$, $VIII/^a$, die andern bezw. mit $II/^i$, $II/^a$, $III/^i$, $III/^a$, $VI/^i$, $VI/^a$, $VII/^i$, $VII/^a$ bezeichnet sein; ein unterer Index soll wieder das entsprechende Blatt der Z-Fläche angeben.

Wir wählen nun einen Punkt, der im Flächenteile I des ersten Blattes der Fläche Z liegt, für den also x und y positiv sind und denken uns die Konstanten A, B, C, D so beschaffen[1]), dass $\varrho < 1$ ist, wenn der Punkt in I liegt und $\varrho > 1$, wenn er in VIII liegt. Es entsprechen daher den Flächenteilen $I/_1$ und $VIII/_1$ von Z bes. die Flächenteile $VIII/_1^i$ und $VIII/_1^a$ in Z'

[1]) Was z. B. in dem in Fig. 3 gezeichneten Falle eintritt.

Durch Überschreiten der Strecke A B auf der Hyperbel (9b) gelangt man in Z von $I/_1$ nach $VIII/_3$; dementsprechend in Z durch Überschreiten der Linie A B von $VIII/_1^i$ nach $V/_2^i$; durch Überschreiten der Linie C ∞ auf der Hyperbel (9b) gelangt man in Z von $I/_1$ nach $VIII/_4$; dem entspricht in Z das Überschreiten des Halbstrahles Ω C; da hierbei das 1. Blatt nicht verlassen wird, so gelangt man von $VIII/_1^i$ nach $I/_1^i$. Es entsprechen sich dabei die Flächenteile $VIII/_3$ und $V/_2^i$ einerseits, $VIII/_4$ und $I/_1^i$ andererseits. Durch Überschreiten der Linie C ∞ auf der Hyperbel (9b) gelangt man in Z von $VIII/_1$ nach $I/_4$; dem entspricht in Z das Überschreiten von $VIII/_1^a$ über die auf der ξ-Achse gelegene Linie C ∞ nach $I/_1^a$; einem Überschreiten von $VIII/_1$ über die Strecke A B auf der Hyperbel (9b) nach $I/_3$ in Z entspricht ein solches von $VIII/_1^a$ über A_1 B_1 nach $V/_2^a$ in Z. Es entsprechen sich also $I/_4$ und $I/_1^a$ auf der einen, $I/_3$ und $V/_2^a$ auf der anderen Seite. Setzt man diese Überlegungen fort, so findet man, dass sich die in folgender Tabelle nebeneinander gestellten Flächenstücke entsprechen:

$I/_1 - VIII/_1^i$;	$II/_1 - VII/_1^i$;	$III/_1 - VI/_1^i$;	$IV/_1 - V/_1^i$;
$I/_2 - IV/_2^i$;	$II/_2 - III/_2^i$;	$III/_2 - II/_2^i$;	$IV/_2 - I/_2^i$;
$I/_3 - V/_2^a$;	$II/_3 - VI/_2^a$;	$III/_3 - VII/_2^a$;	$IV/_3 - VIII/_2^a$;
$I/_4 - I/_1^a$;	$II/_4 - II/_1^a$;	$III/_4 - III/_1^a$;	$IV/_4 - IV/_1^a$;
$V/_1 - V/_1^a$;	$VI/_1 - VI/_1^a$;	$VII/_1 - VII/_1^a$;	$VIII/_1 - VIII/_1^a$;
$V/_2 - I/_2^a$;	$VI/_2 - II/_2^a$;	$VII/_2 - III/_2^a$;	$VIII/_2 - IV/_2^a$;
$V/_3 - VIII/_2^i$;	$VI/_3 - VII/_2^i$;	$VII/_3 - VI/_2^i$;	$VIII/_3 - V/_2^i$;
$V/_4 - IV/_1^i$;	$VI/_4 - III/_1^i$;	$VII/_4 - II/_1^i$;	$VIII/_4 - I/_1^i$.

Es werden somit von Z auf das Innere des Kreises $\varrho = 1$ in Z abgebildet die Flächenteile:

$I/_1$, $II/_1$, $III/_1$, $IV/_1$, $V/_3$, $VI/_3$, $VII/_3$, $VIII/_3$;
$I/_2$, $II/_2$, $III/_2$, $IV/_2$, $V/_4$, $VI/_4$, $VII/_4$, $VIII/_4$.

Diese 16 Flächenteile überdecken die Z-Ebene vollständig und doppelt. Die Halbebene $I/_1$, $II/_1$, $III/_1$, $IV/_1$ hängt mit der Halbebene $V/_3$, $VI/_3$, $VII/_3$, $VIII/_3$ längs der gebrochenen Linie B A O A' B' und mit der Halbebene $V/_4$, $VI/_4$, $VII/_4$, $VIII/_4$ längs der Linie C ∞ C' auf der Hyperbel (9b) zusammen, ebenso die Halbebene $I/_2$, $II/_2$, $III/_2$, $IV/_2$ mit der Halbebene $V/_3$, $VI/_3$, $VII/_3$, $VIII/_3$ längs B A O A' B' und mit der Halbebene $V/_4$, $VI/_4$, $VII/_4$, $VIII/_4$ längs C ∞ C'. Für die so entstandene 2-blätterige Fläche, in der überall $\varrho < 1$ ist, bilden die Strecken B C und B' C' der Hyperbel (9b) unüberschreitbare Begrenzungen.

Ganz Analoges gilt von der zweiblätterigen Fläche, in der überall $\varrho > 1$ ist.

Es entspricht ferner dem Ringe, der in Z von den Kreisen

$\varrho = 1$ und $\varrho = \sqrt{\sqrt{\frac{C^2 + 4B^2}{C^2 + 4D^2}} - 2\sqrt{\frac{B^2 - D^2}{C^2 + 4D^2}}}$ begrenzt wird

und sich durch die Flächenteile $I/_1^i$, $VIII/_1^i$, $V/_2^i$, $IV/_2^i$ zieht, in Z das Innere des einen Ovals der Kurve (15), insofern es sich in den Flächenteilen $VIII/_4$, $I/_1$, $VIII/_3$, $I/_2$ befindet, also ein geschlossenes Flächenstück, das sich zweimal um die Strecke B C windet; dem andern Ring, der von denselben Kreisen

$\varrho = 1$ und $\varrho = \sqrt{\sqrt{\frac{C^2 + 4B^2}{C^2 + 4D^2}} - 2\sqrt{\frac{B^2 - D^2}{C^2 + 4D^2}}}$ begrenzt wird,

sich aber durch die Flächenteile $I/_2^i$, $VIII/_2^i$, $V/_1^i$, $IV/_1^i$ hinzieht, entspricht das Innere des 2. Ovals derselben Kurve (15), insofern es sich in den Flächenteilen $IV/_2$, $V/_3$, $IV/_1$, $V/_4$ befindet.

Dem Ringe, der in Z von den Kreisen

$\varrho = \sqrt{\sqrt{\frac{C^2 + 4B^2}{C^2 + 4D^2}} - 2\sqrt{\frac{B^2 - D^2}{C^2 + 4D^2}}}$ $\varrho = \left|\sqrt{\frac{c - b}{c + b}}\right|$ begrenzt

wird und sich durch die Flächenteile $I/_1^i$, $VIII/_1^i$, $V/_2^i$, $VI/_2^i$, $V/_2^i$, $IV/_2^i$, $I/_1^i$, $II/_1^i$ zieht, entspricht in Z die von dem einen Oval der Kurve (15) und der einen Schleife der Kurve (17) ringförmig begrenzten Fläche, insofern sie sich durch die Flächenteile $VIII/_4$, $I/_1$, $VIII/_3$, $VII/_3$, $VIII/_3$, $I/_2$, $VIII/_4$, $VII/_4$ hinzieht; zieht sich der erstere in Z durch die Flächenteile $I/_2^i$, $VIII/_2^i$, $V/_1^i$, $VI/_1^i$, $V/_1^i$, $IV/_1^i$, $I/_2^i$, $II/_2^i$, so entspricht ihm in Z die von dem andern Ovale der Kurve (15) und der zweiten Schleife der Kurve (17) ringförmig begrenzte Fläche, die sich durch die Flächenteile $IV/_2$, $V/_3$, $IV/_1$, $III/_1$, $IV/_1$, $V/_4$, $IV/_2$, $III/_2$ hinzieht. In beiden Fällen erhalten wir also geschlossene Flächenstücke, die sich zweimal um die Strecken B C bezw. B' C' winden.

Der von dem im Innern des Kreises $\varrho = 1$ gelegenen Teile der Kurve (21) eingeschlossenen Fläche, insofern sie im ersten Blatt der Z-Fläche liegt ($II/_1^i$, $III/_1^i$, $VI/_1^i$, $VII/_1^i$), entspricht die Fläche des 2. Quadranten des ersten Blattes und des 4. Quadranten des 4. Blattes ($VII/_4$, $VI/_4$, $III/_1$, $II/_1$), insofern sie im zweiten Blatte der Z-Fläche liegt ($II/_2^i$, $III/_2^i$, $VI/_2^i$, $VII/_2^i$), die Fläche des 2. Quadranten des zweiten Blattes und des 4. Quadranten im 3. Blatte der Z-Fläche ($III/_2$, $II/_2$, $VII/_3$, $VI/_3$); der von derselben Kurve (21) und dem Kreise $\varrho = 1$ eingeschlossenen Fläche, insofern sie sich durch die Flächenteile $I/_1^i$, $VIII/_1^i$, $V/_2^i$, $IV/_2^i$ in Z hinzieht, entspricht in Z die Fläche des ersten und dritten Quadranten, insofern sie sich in $VIII/_4$, $I/_1$, $VIII/_3$, $I/_2$ befinden; erstreckt sich erstere in Z über $I/_2^i$, $VIII/_2^i$, $V/_1^i$, $IV/_1^i$,

so erstrecken sich die entsprechenden Flächenteile der gleichen Quadranten in Z über $IV/_2$, $V/_3$, $IV/_1$, $V/_4$. In ganz derselben Weise lassen sich die Teile in Z finden, die den analogen Flächenteilen ausserhalb des Kreises $\varrho = 1$ entsprechen und die noch übrigen Blätterstücke überdecken. (Vergl. Fig. 1 u. 2).

Wir fügen noch die Modifikationen an, die sich in unsern Ausnahmefällen ergeben.

1. $A'D - BC = o$.

a) Für $\frac{m}{n} = \frac{\alpha}{\beta}$ erhalten wir sofort die Ergebnisse des Herrn von Lindemann aus dem Vorstehenden, wenn wir beachten, dass die Flächenstücke $I + II$ in den 1., $III + IV$ in den 2., $V + VI$ in den 3., und $VII + VIII$ in den 4. Quadranten übergehen und an Stelle des gebrochenen Lienienzuges B A O A' B' das geradlinige Stück B O B' der X-Achse tritt, während in Z an Stelle der Linienzüge $O_1 A_1 B A O$ und $O'_1 A'_1 B' A' O'$ die geradlinigen Stücke $O_1 B O$ und $O'_1 B' O'$ der Y-Achse treten.

b) $\frac{m}{n} = -\frac{\beta}{\alpha}$.

Aus der 2. Gleichung (5) folgt, das für $-\frac{\pi}{2} \leqq \omega \leqq o$ ein Punkt im 1. Quadranten des 1. Blattes der Fläche Z liegt, wenn $\varrho > 1$ und im 2., wenn $\varrho < 1$ ist. Es entsprechen daher den Flächenteilen $I/_1$ und $IV/_1$ in Z die Flächenteile $IV/_1^a$ und $IV/_1^i$ der Z-Fläche. In derselben Weise wie oben erhält man folgende Tabelle:

$I/_1 - IV/_1^a$,	$II/_1 - IV/_1^i$,	$III/_1 - III/_1^i$,	$IV/_1 - III/_1^a$,
$I/_2 - II/_2^a$,	$II/_2 - II/_2^i$,	$III/_2 - I/_2^i$,	$IV/_2 - I/_2^a$,
$I/_3 - III/_2^i$,	$II/_3 - III/_2^a$,	$III/_3 - IV/_2^a$,	$IV/_3 - IV/_2^i$,
$I/_4 - I/_1^i$,	$II/_4 - I/_1^a$,	$III/_4 - II/_1^a$,	$IV/_4 - II/_1^i$.

Es werden somit von Z auf das Innere des Kreises $\varrho = 1$ in Z abgebildet die Flächenteile:

$I/_4$, $II/_1$, $III/_1$, $IV/_4$,
$I/_3$, $II/_2$, $III/_2$, $IV/_3$.

Als Verzweigungsschnitte sind dabei gewählt: in Z C ∞ C', B O B'; in Z die Stücke $O_1 B O$, $O'_1 B' O'$ des Einheitskreises. Für die 2-blätterige Fläche, in der überall $\varrho < 1$ ist, bildet C O C' eine unüberschreitbare Begrenzung. (Vergl. Fig. 6).

2. $AC + 4BD = o$.

Es seien b, c konjugiert imaginär, also $m = \alpha$, $n = -\beta$ und $|\alpha| > |\beta|$. Die Kurve (21) zerfällt in das Medianenpaar

der Achsenwinkel. Aus der 1. Gleichung (5) folgt nun sofort, dass für $-\frac{\pi}{2} \leqq \omega \leqq 0$ ein Punkt im Flächenteil I (d. h. in dem von der $+X$-, $+Y$-Achse und der Hyperbel (9b) begrenzten Gebiet) des ersten Blattes der Fläche Z für $\varrho < 1$ gelegen ist, dagegen in VIII, wenn $\varrho > 1$ ist. Es entsprechen somit den Flächenteilen $I/_1$ und $VIII/_1$ in Z die Gebietsteile $VIII/_1^i$ und $VIII/_1^a$ in Z. Durch dasselbe Verfahren wie oben erhält man so die Tabelle:

$I/_1 - VIII/_1^i$;	$II/_1 - VII/_1^i$;	$III/_1 - VI/_1^i$;	$IV/_1 - V/_1^i$;
$I/_2 - IV/_2^i$;	$II/_2 - III/_2^i$;	$III/_2 - II/_2^i$;	$IV/_2 - I/_2^i$;
$I/_3 - V/_2^a$;	$II/_3 - VI/_2^a$;	$III/_3 - VII/_2^a$;	$IV/_3 - VIII/_2^a$;
$I/_4 - I/_1^a$;	$II/_4 - II/_1^a$;	$III/_4 - III/_1^a$;	$IV/_4 - IV/_1^a$;
$V/_1 - V/_1^a$;	$VI/_1 - VI/_1^a$;	$VII/_1 - VII/_1^a$;	$VIII/_1 - VIII/_1^a$;
$V/_2 - I/_2^a$;	$VI/_2 - II/_2^a$;	$VII/_2 - III/_2^a$;	$VIII/_2 - IV/_2^a$;
$V/_3 - VIII/_2^i$;	$VI/_3 - VII/_2^i$;	$VII/_3 - VI/_2^i$;	$VIII/_3 - V/_2^i$;
$V/_4 - IV/_1^i$;	$VI/_4 - III/_1^i$;	$VII/_4 - II/_1^i$;	$VIII/_4 - I/_1^i$.

Auf das Innere des Einheitskreises werden somit abgebildet die Flächenteile:

$I/_1$, $II/_1$, $III/_1$, $IV/_1$, $V/_4$, $VI/_4$, $VII/_4$, $VIII/_4$;
$I/_2$, $II/_2$, $III/_2$, $IV/_2$, $V/_3$, $VI/_3$, $VII/_3$, $VIII/_3$.

Dabei sind als Verzweigungsschnitte gewählt: in Z $C \infty C'$ und $B A O A' B'$; in Z $O A B A_1 O_1$ und $O' A' B' A'_1 O'_1$. $C A$ und $C' A'$ bilden für die 2-blätterige Fläche, in der $\varrho < 1$ ist, unüberschreitbare Begrenzungen. (Vergl. Fig. 7.)

Dem Ringe, welcher in Z von den Kreisen $\varrho = 1$ und $\varrho = \left| \sqrt{\frac{c-b}{c+b}} \right|$ begrenzt wird und sich durch die Flächenteile $VIII/_1^i$, $VII/_2^i$, $VI/_2^i$, $V/_2^i$, $IV/_2^i$, $III/_1^i$, $II/_1^i$, $I/_1^i$ zieht, entspricht in Z das Innere der einen Schleife der Kurve (17), insofern es sich durch die Flächenteile $I/_1$, $VI/_3$, $VII/_3$, $VIII/_3$, $I/_2$, $VI/_4$, $VII/_4$, $VIII/_4$ erstreckt; dem andern Ringe, von denselben Kreisen begrenzt, sich aber hinziehend durch die Flächenteile $I/_2^i$, $II/_2^i$, $III/_2^i$, $IV/_1^i$, $V/_1^i$, $VI/_1^i$, $VII/_1^i$, $VIII/_2^i$, entspricht in Z das Innere der andern Schleife der Kurve (17), insofern es sich in den Flächenteilen $IV/_2$, $III/_2$, $II/_2$, $V/_4$, $IV/_1$, $III/_1$, $II/_1$, $V/_3$ befindet; in beiden Fällen erhalten wir also geschlossene Flächenstücke, die sich zweimal um B C bezw. B' C' winden. Die beiden in Z liegenden Ringe, welche von den Kreisen $\varrho = 1$ und $\varrho = \left| \sqrt{\frac{c+b}{c-b}} \right|$ begrenzt werden, entsprechen in analoger Weise den andern innerhalb der beiden Schleifen der Kurve (17) liegenden Blätterstücken von Z.

Studien über einige Randwertaufgaben der Potentialtheorie.

Von Otto Volk in Kaunas.

Paduodamam straipsny dvilypiai apkrauto skritulio potencialas reiškiamas rutulio funkcijų eilute. Vietose, artimose skrituliui, delei eilutės netobulos konvergencijos potencialas išskaičiuojamas Liebmann'o pakeitimų pagalba. Pagalios dvilypiai apkrautos atkarpos logaritminis potencialas tiek pat reiškiamas begalinėmis eilutėmis ir atatinkamonis integralinėmis lygtimis.

Eine Funktion V, die so beschaffen ist, dass sie

1) der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta V = o$ genügt,

2) im ganzen Raume endlich und stetig ist, während ihre ersten partiellen Differentialquotienten (bei sonstiger Stetigkeit) auf einer im Endlichen gelegenen, randlosen Fläche S unstetig werden,

3) im Unendlichen verschwindet wie $\frac{1}{R}$,

4) auf der ganzen Fläche S vorgeschriebene Werte annimmt, ist eindeutig bestimmt und darstellbar in der Form:

$$V = \int_{(S)} \frac{\varkappa(\sigma)}{r_{pq}} \, d\sigma$$

Hierbei bezeichnet $d\sigma$ ein Flächenelement der gegebenen Fläche S, die einen bestimmten Raum umschliesst und mit einer Masse von der Dichtigkeit $\varkappa(\sigma)$ belegt ist. $\varkappa(\sigma)$ ist dabei eine Funktion des Orts auf der Oberfläche, r_{pq} der Abstand eines beliebigen, innerhalb oder ausserhalb S gelegenen Punktes von den Punkten Q der Flächenelemente $d\sigma$. Eine Funktion mit diesen Eigenschaften nennt man Potential oder Potentialfunktion.

Die Lösung der Frage, eine Potentialfunktion zu bestimmen, die den obigen 4 Bedingungen genügt, welche ursprünglich durch Problemstellungen der theoretischen Physik veranlasst wurde, ist nun nicht bloss für diese Wissenschaft, sondern auch für die reine Mathematik von hervorragender Wichtigkeit geworden. Es handelt sich hier vor allem um den Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit dieser Potentialfunktion. Seit

den berühmten Untersuchungen von Green[1]) und Gauss[2]) beschäftigten sich daher viele Mathematiker mit diesen Problemen. Neben die verschiedenen Methoden, die zur Lösung dieser Potentialprobleme ersonnen wurden, trat nun in neuester Zeit noch eine, die die Fredholmsche Theorie der Integralgleichungen verwendet. Durch Einführung dieser Theorie in die Potentialtheorie ist namentlich durch die Arbeiten von Plemelj[3]) das Problem in der Ebene soweit gefördert worden, dass damit praktisch sehr viele Potentialaufgaben gelöst werden können (vergl. § 25: Leiterpotentiale und seine Beispiele: Kreis und Ellipse in „Potentialtheoretische Untersuchungen" S. 68 ff). Bei Anwendung auf Raumprobleme aber treten, wie den andern Methoden, so auch dieser noch viele Schwierigkeiten entgegen, die ihrer Lösung harren. So ist es bis jetzt bei verhältnismässig wenigen Raumproblemen gelungen, die gesuchte Potentialfunktion wirklich zu bestimmen[4]). Unter ihnen befindet sich auch der Fall der Kreisscheibe, des zylindrischen Stabes und das Kondensatorproblem.

Die Lösung des Problems, das die idealdünne Kreisscheibe stellt, wurde schon von Green gegeben. Im letzten Kapitel seiner Abhandlung: „Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids" (1832)[5]) behandelt er die Aufgabe, „die Verteilung des hypothetischen Fluidums auf einer Kreisscheibe zu bestimmen, wenn das Potential gegebene Werte auf der Scheibe annehmen soll". Dabei trifft er noch eine Verallgemeinerung, indem er die Teilchen des „hypothetischen Fluidums" nicht im umgekehrten quadratischen Verhältnis der Entfernung wirken lässt, sondern umgekehrt wie irgend eine andere, die n. Potenz. Die Lösung geschieht mit Hilfe von trigonometrischen Reihen. Andere Lösungen dieses Problems ergaben sich aus der Deformation eines Rotationsellipsoids, für das durch die Arbeiten von Lamé[6]), Heine[7]),

---

[1]) G. Green, An essay on the application of mathematical Analysis to the theories of electricity and magnetisme, 1828. (Vergl. Ostwalds Klassiker No 61.)

[2]) C. F. Gauss, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte, 1840. (Ges. Werke, Bd. V.)

[3]) J. Plemelj, Randwertaufgaben der mathematischen Physik. Monatshefte für Math. und Physik, 15 (1904); Potentialtheoretische Untersuchungen, Leipzig 1911.

[4]) Vergl. M. Bacharach, Abriss der Geschichte des Potentials, 1883, S. 57 ff.

[5]) Art. 10, S. 172—182. In der Strenge vervollkommnet ist die Methode Green's bei: F. Büttner, Studien über die Greensche Abhandlung: Mathematical investigations concerning the laws... (1832). Leipzig, 1900. S. 90 ff.

[6]) Vergl. Journal de mathématiques pures et appliquées, Bd. IV, S. 126 ff; 351 ff.

[7]) „Über Aufgaben, welche auf partielle Differentialgleichungen führen". Journal f. d. r. u. ang. Math., Bd. 26 (1843) S. 185 ff.

F. Neumann[1]), u. a. eine Lösung angegeben werden kann in Form von Doppelreihen, die sich bei Abplattung des Rotationsellipsoides bedeutend vereinfachten und summiert werden konnten[2]). Eine andere, direkte Methode besteht in der Verwendung eines partikulären Integrals

$$V = e^{-\alpha z}\,\Phi$$

der partiellen Differentialgleichung $\Delta V = o$, wobei Φ der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \alpha^2 \Phi = o$$

genügen muss. Führt man nun die Polarkoordinaten r, φ ein, so geht diese Differentialgleichung, da Φ infolge der Rotationssymmetrie als von φ unabhängig betrachtet werden kann, (vorausgesetzt, dass die vorgeschriebenen Oberflächenwerte von V Rotationssymmetrie aufweisen), in die Differentialgleichung der Besselschen Funktion über. Bei Berücksichtigung gewisser Eigenschaften der Besselschen Funktionen erhält man dann:

$$V = \frac{m}{a} \int_0^\infty e^{-\alpha z}\,\frac{\sin \alpha z}{\alpha}\,\mathfrak{J}(\alpha r)\,d\alpha\,,$$

wo $\mathfrak{J}(\alpha r)$ die Besselsche Funktion nullter Ordnung und erster Art und m die Gesamtmasse der leitenden Kreisscheibe vom Radius a ist[3]). Durch Ansetzen einer Reihe von der Form

$$V = \sum_0^\infty n\; A_n P_n(\mu)\, Q_n(i\sigma)\,,$$

wobei $P_n(\mu)$ die Kugelfunktion erster Art von der Ordnung n und vom Argument μ, $Q_n(i\sigma)$ die Kugelfunktion zweiter Art von der Ordnung n und vom Argumente $i\sigma$ darstellt und μ, σ die krummlinigen Koordinaten bedeuten:

$$x = a\sqrt{\sigma^2 + 1}\;\sqrt{1 - \mu^2}\cos\varphi\,,$$
$$y = a\sqrt{\sigma^2 + 1}\;\sqrt{1 - \mu^2}\sin\varphi\,,$$
$$z = a\,\sigma\,\mu\,,$$

---

[1]) „Entwicklung der in elliptischen Koordinaten ausgedrückten reziproken Entfernung zweier Punkte". Journal f. d. r. u. ang. Math., Bd. 37 (1848) S 21 ff.

[2]) Vergl. R. Lipschitz, Beiträge zur Theorie der Verteilung der statischen und dynamischen Elektrizität in Körpern. Journal f. d. r. u. ang. Math., Bd. 58 (1860) S. 39 ff; E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen. 2. A. 1878/81 Bd. II S. 128 ff; G. Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus (1891) S. 30 ff; Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik (1910) Bd. I S. 338 f.

[3]) Riemann Weber, l. c. Bd. I, S. 339 f.

Vilniaus Universiteto Biblioteka

gelangt R. Gans[1]) zu der Lösung:

$$V = \frac{m}{a} \operatorname{arccotg} \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2-a^2}{2a^2} + \sqrt{\left(\frac{x^2+y^2+z^2-a^2}{2a^2}\right)^2 - \frac{z^2}{a^2}}}.$$

m ist wieder die Gesamtmasse der Belegung und a der Radius der Scheibe.

Aus der Tatsache, dass die gesuchte Funktion V (bei Doppelbelegung) gleich dem körperlichen Winkel[2]), unter dem die Kreisscheibe in einem Aufpunkt P erscheint, dividiert durch 2π ist, hat H. Kimmel[3]) eine ebenfalls nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihenentwicklung für V gefunden, indem er diesen körperlichen Winkel für die Punkte der Achse mühelos berechnen konnte und sich nun die Aufgabe stellte, V so zu bestimmen, dass es auf der Achse der Scheibe (Z-Achse) diese Werte annahm. Er erhielt so als Lösung:

$$V = 1 - \frac{r}{c} P_1(\cos\vartheta) + \frac{1}{2}\frac{r^3}{c^3} P_3(\cos\vartheta) - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{r^5}{c^5} P_5(\cos\vartheta) + - \cdots \text{ für } r < c$$

und

$$V = \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} P_1(\cos\vartheta) - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{c^4}{r^4} P_3(\cos\vartheta) + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{c^6}{r^6} P_5(\cos\vartheta) - + \cdots \text{ für } r > c.$$

r, ϑ sind dabei die Polarkoordinaten des Aufpunktes P, c der Radius der Scheibe.

Mittels Verwendung Besselscher Funktionen und der Methode der Integralgleichungen hat M. Hafen[4]) eine exakte Lösung des Problems bei beliebigen Oberflächenwerten in der Form eines bestimmten Integrals gegeben.

Weniger oft behandelt sind das Problem der Kreisscheibe bei Berücksichtigung der Dicke der Platte und das Kondensatorproblem. Kirchhoff[5]) behandelte in seinen Vorlesungen beide Probleme näherungsweise; eine angenäherte graphische Lösung

---

[1]) Vergl. „Ein Beitrag zur Theorie der Nobilischen Farbenringe". Zeitschrift f. Math. und Physik, Bd. 49 (1903), S. 307 f; „Das Potential einer Kreisscheibe", Dies. Zeitschrift, Bd. 53 (1906), S. 434 ff.

[2]) Vergl. § 3, Formel (18).

[3]) H. Kimmel, Konstruktion der Strömungsbilder eines stromdurchflossenen Kreisrings, eines zylindrischen Solenoides und einer gleichmässig mit Masse belegten Kreisfläche. Zeitschrift f. Math. und Physik Bd. 59, (1911) S. 20 ff.

[4]) „Studien über einige Probleme der Potentialtheorie". Math. Annalen Bd. 69 (1910) S. 520 ff.

[5]) l. c. 8. Vorlesung, S. 90 ff; 109 ff.

des Kondensatorproblems gab Holzmüller[1]), indem er die Abbildungsfunktion

$$W = z + e^z$$

benutzte. Eine exakte Lösung beider Probleme haben wir von M. Hafen[2]) in der bereits erwähnten Abhandlung. Da aber die Reihen, die er erhielt, für kleine Dicken, resp. kleine Entfernungen der Platten sehr schlecht konvergieren, so ist es ihm, wie er auch selbst in der Anmerkung zugesteht, nicht möglich gewesen, seine exakte Lösung der beiden Probleme mit der Näherungslösung Kirchhoffs zu vergleichen.

Das Problem der Verteilung der Elektrizität auf Zylinderflächen ist erfolgreich von Heine[3]) behandelt worden, indem er die Lösung für folgende drei Fälle gegeben hat: 1) der Zylinder erstreckt sich von $-\infty$ bis $+\infty$, 2) von $-h$ bis $+h$; 3) von o bis ∞. Seine Methode stützt sich auf gewisse Eigenschaften der Besselschen und verwandter Funktionen. Für Zylinderflächen, bei denen die Querdimensionen und gegenseitigen Entfernungen der Flächen klein sind im Vergleich zur Längenerstreckung der Zylinder, hatten Riemann[4]) und H. Weber[5]) eine Lösung gegeben durch Zurückführung des Problems auf eine Abbildungsaufgabe.

In der vorliegenden Arbeit wird zuerst durch Einführung elliptischer Koordinaten das Problem der idealdünnen Kreisscheibe bei einfacher und doppelter Belegung auf die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, nämlich der Kugelfunktionen, zurückgeführt. So ergab sich als Ausdruck für das Potential im allgemeinen Fall eine unendliche Reihe, deren Glieder aus Produkten der Kugelfunktionen erster und zweiter Art derselben Ordnung bestehen. Für den Fall der leitenden Kreisscheibe reduzierte sich diese Reihe auf ein einziges Glied, und es war nicht schwer, unsere Lösung mit den auf anderem Wege gefundenen zu vergleichen bezw. zu identifizieren. Im Falle der doppelt belegten Scheibe ergab sich eine überall konvergente Reihe, deren praktische Brauchbarkeit durch Berechnung der Niveau- und Stromlinien dargetan wird. Für Punkte in der Umgebung der Scheibe wurde die Liebmannsche Mittelungsmethode zu Hilfe genommen.

Im zweiten Abschnitt wird mittels derselben Methode das Potential eines unendlich dünnen Stabes mit kreisförmigem

---

[1]) G. Holzmüller, Das Potential und seine Anwendung (Ingenieur-Math. II) 1898 S. 96 f und S. 286.

[2]) l. c. S. 520 ff.

[3]) Handbuch der Kugelfunktionen, II S. 185 ff. vergl. auch: E. Häntzschel, Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gew. Diff. gl. 1893, I—III.

[4]) In dem Fragmente: Ueber das Gleichgewicht der Elektrizität auf Zylindern mit kreisförmigem Querschnitt. Ges. math. Werke, Nr. XXV, S. 418.

[5]) Vergl. Riemann-Weber, l. c. I, S. 346 ff.

Querschnitt und das logarithmische Potential einer belegten Strecke allgemein und für besondere Beispiele bestimmt. Im Falle des leitenden Stabes lässt sich unser Resultat wieder leicht mit dem von Kirchhoff aus dem verlängerten Rotationsellipsoid abgeleiteten identifizieren[1]). Bei dem Problem des logarithmischen Potentials der belegten Strecke konnten wir auch durch Ausgehen von einer Integralgleichung erster Art zu einer Lösung gelangen.

Es sei mir gestattet, Herrn Prof. Dr. Liebmann, der mich bei Ausführung der Arbeit mit seinen Ratschlägen gütigst unterstützt hat, auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank abzustatten[2]).

I. Kreisscheibe.

Wir denken uns die Kreisscheibe als unendlich dünne Platte in der X Y - Ebene so gelegen, dass ihr Mittelpunkt mit dem Anfangspunkt des Koordinatensystems zusammenfällt. Der Radius der Scheibe sei der Einfachheit halber gleich der Einheit. Die Problemstellung ist nun: eine Potentialfunktion zu ermitteln, die im ganzen Raum der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

genügt, samt ihren ersten Differentialquotienten gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt und auf der Kreisscheibe vorgeschriebene Werte annimmt.

§ 1.

Potential der leitenden Kreisscheibe.

Die Problemstellung ist hier folgende:

Es sei eine im ganzen Raume endliche und stetige Funktion $V(x, y, z)$ so zu bestimmen, dass sie den Bedingungen genügt:

1) $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$.

2) $\frac{\partial V}{\partial z}$ stetig mit Ausnahme, wenn $z = 0$ und $x^2 + y^2 \leqq 1$.

3) Im Unendlichen soll V verschwinden wie $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

4) Wenn $z = 0$ und $x^2 + y^2 \leqq 1$, soll V konstant sein.

---

[1]) Vergl. Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizität und Magnetismus, 1891, S. 37.

[2]) Die vorliegende Arbeit war als Dissertation der techn. Hochschule in München im April 1918 vorgelegen. Ihre Drucklegung war in der Zeitschrift für Math. und Phys. vorgesehen. Da letztere einging, so benutze ich jetzt die Gelegenheit, sie zu veröffentlichen.

Führt man die Zylinderkoordinaten ein:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} x &= \varrho \cos\varphi, \\ y &= \varrho \sin\varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

wo ϱ, φ die Polarkoordinaten in der XY-Ebene bedeuten, so geht die Laplacesche Differentialgleichung

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

über in:

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial V}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 (\varrho V)}{\partial z^2} = 0.$$

Infolge der Rotationssymmetrie kann V als von φ unabhängig betrachtet und somit $\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$ gesetzt werden. (3) geht über in:

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial V}{\partial \varrho}\right) + \frac{\partial^2 (\varrho V)}{\partial z^2} = 0.$$

Es genügt also, den Wert von V für alle Punkte einer beliebigen Meridianebene bestimmt zu haben und wir können uns darauf beschränken, V für alle Punkte der Meridianebene $\varphi = 0$ zu bestimmen.

Führen wir elliptische Koordinaten ein:

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} \varrho &= \mathfrak{Cof}\,\lambda \cdot \cos\vartheta \\ z &= \mathfrak{Sin}\,\lambda \cdot \sin\vartheta, \end{aligned}$$

so geht (4) über in:

$$\text{(6)} \qquad \frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda}{1} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial}\left(\mathfrak{Cof}\,\lambda \frac{\partial V}{\partial \lambda}\right) + \frac{1}{\cos\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\cos\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right) = 0.$$

Wir haben dann die Aufgabe, eine überall endliche und stetige Funktion V von λ und ϑ zu bestimmen, die den Bedingungen genügt:

1°) $\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\mathfrak{Cof} \frac{\partial V}{\partial \lambda}\right) + \frac{1}{\cos\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\cos\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right) = 0.$

2°) $\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ stetig mit Ausnahme für $\lambda = 0$.

3°) Für $\lambda = \infty$ soll V verschwinden.

4°) Für $\lambda = 0$ soll V für alle Werte von ϑ konstant sein.

Da nach 4°) V für alle Werte von ϑ einen konstanten Wert, sagen wir 1, annehmen soll, also von ϑ unabhängig sein muss, so muss V für alle Werte von λ von ϑ unabhängig sein. Daher ist $\frac{\partial V}{\partial \vartheta} = 0$ und 1°) reduziert auf:

(7) $$\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\lambda}\cdot\frac{d}{d\lambda}\left(\mathfrak{Cof}\,\lambda\,\frac{dV}{d\lambda}\right)=0\,.$$

Hieraus ergibt sich durch Integration:

(8) $$dV=\frac{c\,d\lambda}{\mathfrak{Cof}\,\lambda}\,.$$

Setzen wir nun:

(9) $$u=\mathfrak{Sin}\,\lambda,\quad du=\mathfrak{Cof}\,\lambda\cdot d\lambda\,,$$

so geht (8) über in:

$$dV=\frac{c}{1+u^2}\,du\,,$$

woraus wir durch Integration erhalten:

$$V=c\,\mathrm{arctg}\,u+c_1\,.$$

Die Konstanten c und c_1 bestimmen sich aus 3^0 und 4^0. Man erhält:

$$c=-\frac{2}{\pi},\quad c_1=1\,,$$

und somit:

$$V=-\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,u+1=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arc\,cotg}\,u$$

oder

(10) $$V=\frac{2}{\pi}\,\mathrm{arccotg}\,(\mathfrak{Sin}\,\lambda)\qquad\left(\text{arc von o bis }\frac{\pi}{2}\right).$$

Wie sich aus (5) ergibt, ist $u=\mathfrak{Sin}\,\lambda$ eine Wurzel der Gleichung:

$$\frac{\varrho^2}{1+u^2}+\frac{z^2}{u^2}=1\,.$$

Hieraus ergibt sich:

(11) $$u=\sqrt{\frac{-1+\varrho^2+z^2+\sqrt{(1-\varrho^2-z^2)^2+4z^2}}{2}}\,.$$

Wie die Potentialtheorie nachweist, hängt die Flächendichte $\varkappa$ mit dem Potential V zusammen durch die Formel:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_+-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_-=-4\pi\varkappa\,,$$

wo n die Flächennormale an der betreffenden Stelle und + die Annäherung von aussen, — die Annäherung von innen an die Fläche (je auf der Normalen) bedeutet.

In unserem Falle ist:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_+=-\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_-=\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z=0}\,,$$

so dass wir schliesslich erhalten:

(12) $$\varkappa=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\sin\vartheta}=\frac{1}{\pi^2\sqrt{1-\varrho^2}}\,.$$

Am Rande der Scheibe wird also die Dichte unendlich gross, während die Gesamtmasse m:

$$(13) \qquad m = \int_{(\text{Scheibe})} \varkappa \, d\sigma = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{\varrho \, d\varrho \, d\varphi}{\sqrt{1-\varrho^2}} = \frac{2}{\pi}$$

endlich bleibt.

Man sieht sofort, dass unser Resultat mit dem von Gans[1]) übereinstimmt, der seinerseits die Indentität seines Resultats mit dem von H. Weber[2]) abgeleiteten nachwies[3]); ferner auch mit dem von Kirchhoff[3]) gefundenen Resultate.

§ 2.

Das Potential einer Kreisscheibe bei Doppelbelegung.

Dieses Problem unterscheidet sich von dem des § 1 durch die veränderten Oberflächen- und Stetigkeitsbedingungen. Die partielle Differentialgleichung, der die Potentialfunktion W der Doppelbelegung genügen muss, ist dieselbe wie in § 1, Gl. (16):

$$1) \quad \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\mathfrak{Cof}\,\lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda}\right) + \frac{1}{\cos\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\cos\vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right) = 0 .$$

2) Im ganzen Raume ausserhalb der Kreisscheibe soll W endlich und stetig sein, während seine ersten Ableitungen im ganzen Raume endlich und stetig sein müssen.

3) Im Unendlichen (d. h. für $\lambda = \infty$) soll W verschwinden.

4) Wenn wir nun vorschreiben, dass das Potential W auf der oberen Seite der Scheibe den Wert $+1$, auf der unteren den Wert -1 annehmen soll, so lauten die analytischen Bedingungen dafür:

$$W = +1 \text{ für } \lambda = 0, \; 0 < \vartheta < \pi,$$
$$W = -1 \text{ für } \lambda = 0, \; \pi < \vartheta < 2\pi .$$

Durch diese 4 Bedingungen ist W wieder eindeutig bestimmt. Um eine partikuläre Lösung unserer Differentialgleichung 1)

$$(1) \quad \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\mathfrak{Cof}\,\lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda}\right) + \frac{1}{\cos\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\cos\vartheta \frac{\partial W}{\partial \vartheta}\right) = 0$$

zu erhalten, setzen wir:

$$(2) \qquad W = R(\lambda)\, T(\vartheta),$$

---

[1]) Vergl. Einleitung S. 53 f.

[2]) Vergl. Einleitung S. 52.

[3]) Vergl. R. Gans, Potential der Kreisscheibe. Zeitschrift für Math. und Phys. Bd. 53 (1906). S. 434 ff.

wobei $R(\lambda)$ eine Funktion nur von λ, $T(\vartheta)$ eine Funktion nur von ϑ. Durch diesen Ansatz für W geht (1) über in:

$$(3)\qquad \frac{1}{\mathfrak{Cof}\lambda}\cdot\frac{1}{R(\lambda)}\cdot\frac{d}{d\lambda}\left(\mathfrak{Cof}\lambda\frac{dR}{d\lambda}\right)=-\frac{1}{\cos\vartheta}\cdot\frac{1}{T(\vartheta)}\cdot\frac{d}{d\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{dT}{d\vartheta}\right).$$

Diese Gleichung, deren eine Seite nur von λ, deren andere Seite nur von ϑ abhängt, kann nur bestehen, wenn beide Seiten gleich ein und derselben Konstanten sind, also:

$$(4)\qquad \frac{1}{\mathfrak{Cof}\lambda}\cdot\frac{1}{R(\lambda)}\cdot\frac{d}{d\lambda}\left(\mathfrak{Cof}\lambda\frac{dR}{d\lambda}\right)=\alpha,$$

$$(5)\qquad \frac{1}{\cos\vartheta}\cdot\frac{1}{T(\vartheta)}\cdot\frac{d}{d\vartheta}\left(\cos\vartheta\cdot\frac{dT}{d\vartheta}\right)=-\alpha.$$

Wie sich nun mittels Verwendung gewisser Konvergenzeigenschaften der hypergeometrischen Reihe[1]) oder der Orthogonalitätseigenschaften[2]) zweier zu verschiedenen α gehörigen Lösungen dieser Differentialgleichungen nachweisen lässt, haben sie nur dann eine von Null verschiedene Lösung, die für alle Werte von ϑ des Intervalls o bis 2π mit ihren ersten Abteilungen endlich und stetig ist, wenn

$$\alpha=n(n+1)$$

und n eine ganze Zahl ist.

Wir haben somit die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen zu integrieren:

$$(6)\qquad \frac{1}{\mathfrak{Cof}\lambda}\cdot\frac{d}{d\lambda}\left(\mathfrak{Cof}\lambda\frac{dR}{d\lambda}\right)-n(n+1)R=o,$$

$$(7)\qquad \frac{1}{\cos\vartheta}\cdot\frac{d}{d\vartheta}\left(\cos\vartheta\frac{dT}{d\vartheta}\right)+n(n+1)T=o.$$

Die Gleichung (6) geht durch die Substitution:

$$(8)\qquad u=i\,\mathfrak{Sin}\lambda,\quad du=i\,\mathfrak{Cof}\lambda\,d\lambda$$

über in:

$$(9)\qquad \frac{d}{du}\left[(1-u^2)\frac{dR}{du}\right]+n(n+1)R=o.$$

Das ist aber die Differentialgleichung, der die Kugelfunktionen erster und zweiter Art n. Ordnung genügen. Ein allgemeines Integral ist daher:

$$(A)\qquad R_n=a_n P_n(u)+b_n Q_n(u),$$

wenn wir ein einem bestimmten Parameter n entsprechendes Integral R der Gleichung (6) resp. (9) mit Rn bezeichnen.

---

[1]) Vergl. Riemann-Weber, l. c. I, S. 288 ff.

[2]) Vergl. A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der math. Physik. Braunschweig. 1911. S. 112 f.

Dabei ist:

$$(10)\qquad P_n(u) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(u^n - \frac{n(n-1)}{n(2n-1)}u^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}u^{n-4} + \cdots\right)$$

$$(11)\qquad Q_n(u) = 2^n \int_0^\infty \frac{v^n\,dv}{(\sqrt{u^2-1} + 2uv + v^2\sqrt{u^2-1})^{n+1}}$$ [1])

Die Gleichung (7) geht durch die Substitution:

$$(12)\qquad v = \sin\vartheta$$

über in:

$$(13)\qquad \frac{d}{dv}\left[(1-v^2)\frac{dT}{dv}\right] + n(n+1)\,T = o\,.$$

Das ist ebenfalls die Differentialgleichung der gewöhnlichen Kugelfunktionen. Ihr allgemeines Integral hat daher die Form:

$$(B)\qquad T_n = c_n P_n(v) + d_n Q_n(v)\,.$$

Ein Integral, das der Gleichung (1) genügt, ist nun nach (2):

$$W_n = R_n(u)\,T_n(v)$$

also:

$$W_n = \left(a_n P_n(u) + b_n Q_n(u)\right)\left(c_n P_n(v) + d_n Q_n(v)\right),$$

wobei, um nochmals an die Bedeutung von u und v zu erinnern, die Beziehungen bestehen:

$$(8)\qquad u = i\,\mathfrak{Sin}\,\lambda\,,$$

$$(12)\qquad v = \sin\vartheta\,.$$

Durch Summation aller dieser partikulären Integrale W_n von $n = o$ bis $n = \infty$ erhalten wir dann als allgemeines Integral von (1):

$$(C)\qquad W = \sum_o^\infty n\, W_n = \sum_o^\infty n \left(a_n P_n(u) + b_n Q_n(u)\right)\left(c_n P_n(v) + d_n Q_n(v)\right).$$

Da W nach 3. (S. 59) im Unendlichen d. h. für $u = +i\infty$ verschwinden muss, $P_n(u)$ aber mit dem absoluten Wert nach wachsendem u dem absoluten Betrag nach jede Grenze übersteigt, während sich $Q_n(u)$ der Null nähert, so muss $a_n = o$ sein. Wie nun die Potentialtheorie lehrt, ist W durch die obigen 4 Bedingungen im ganzen Raume ausserhalb der Kreis-

[1]) Vergl. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, I, S. 11 ff; S. 133.

scheibe eindeutig bestimmt; es müssen daher alle d_n verschwinden, da $Q_n(v)$ für $|v|<1$ unstetig wird. Wir erhalten somit für W eine unendliche Reihe von der Form:

$$W=\sum_{0}^{\infty n} A_n P_n(v) Q_n(u).$$

Nach 4. (S. 59) muss W sein Vorzeichen wechseln, wenn ϑ um π zunimmt d. h. nach (12) v in $-v$ übergeht. Nun ist aber, wie man aus (10) ersieht:

$$P_n(-v)=(-1)^n P_n(v). \tag{14}$$

Daher müssen sämtliche Glieder der $P_n(v)$ mit geraden Index verschwinden; also ist:

$$A_{2n}=0.$$

Wir erhalten daher für W die unendliche Reihe:

$$W=\sum_{0}^{\infty n} A_{2n+1} P_{2n+1}(v) Q_{2n+1}(u). \tag{D}$$

Wir bemerken, aus der Tatsache, dass die einzelnen Glieder von W der Laplaceschen Differentialgleichung (1) genügen und stetig und differentiierbar sind, folgt noch nicht, dass auch W der Gleichung (1) genügt. Vielmehr ergibt sich das erst aus der gleichmässigen Konvergenz der Reihe (D) bezw. der differentiierten Reihe, da wir erst dann von der Erlaubtheit der gliedweisen Differentation der Reihe (D) Sicherheit haben. Die gleichmässige Konvergenz der Reihe (D) resp. der gliedweisen differentiierten ergibt sich aber sofort aus dem folgenden.

Bei den Lösungen von H. Weber[1]) und R. Gans[2]) fehlt dieser Nachweis; er liesse sich aber leicht erbringen durch direkte Nachprüfung des Resultates.

§ 3.

Fortsetzung: Bestimmung der A_{2n+1}.

Die Konstanten A_{2n+1} bestimmen sich durch den Wert von W auf der Kreisscheibe: $W=+1$ für $0<\vartheta<\pi$, $W=-1$ für $\pi<\vartheta<2\pi$. Man kann nun die Einheit nach ungeraden Kugelfunktionen entwickeln. Nehmen wir ganz allgemein an, es sei die Funktion $F(x)$ in der Form darstellbar:

$$F(x)=c_0P_0(x)+c_1P_1(x)+c_2P_2(x)+\cdots+c_mP_m(x)+\cdots,$$

so bestimmen sich die c_m aus der Gleichung:

$$c_m = \int_{-1}^{+1} \frac{2m+1}{2} F(x) P_m(x)\, dx .$$

Nun ist in unserem Falle vorgeschrieben:

$$F(x) = +1 \quad (o < x < 1),$$
$$F(x) = -1 \quad (-1 < x < o);$$

daher wird:

$$(15) \qquad \frac{2}{2m+1} c_m = -\int_{-1}^{o} P_m(x)\, dx + \int_{o}^{1} P_m(x)\, dx$$
$$= \begin{cases} o \text{ für } m = 2n, \\ \dfrac{2P'_{2n+1}(o)}{(2n+1)(2n+2)} \text{ für } m = 2n+1^{1}). \end{cases}$$

Wir erhalten so folgende im Intervalle $o < x \leqq 1$ gültige Entwicklung:

$$(16) \quad 1 = \sum_{o}^{\infty n} \frac{4n+1}{(2n+1)(2n+2)} \cdot P'_{2n+1}(o) P_{2n+1}(x) .$$

Setzen wir nun $x = v$, so muss die Reihe (D) für $u = o$ in die Reihe (16) übergehen, so dass also für alle Werte von v des Intervalls $o < v \leqq 1$ die Identität gelten muss:

$$\sum_{o}^{\infty n} A_{2n+1} P_{2n+1}(v) Q_{2n+1}(u = o)$$
$$= \sum_{o}^{\infty n} \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} P'_{2n+1}(o) P_{2n+1}(v) ,$$

wo ist:

$$Q_{2n+1}(u=o) = Q_{2n+1}(o \cdot i) - (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdots 2n+1} = -\frac{1}{P'_{2n+1}(o)}^{2})$$

---

[1]) Wegen Auswertung der Integrale vergl. E. Byerly, Fouriers Series and spherical Harmonics, Boston, 1895. S. 172.

[2]) Vergl. E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, I, S. 133.

Hieraus erhalten wir durch Koeffizientenvergleichung:

$$(17) \qquad A_{2n+1} = -\frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} P'_{2n+1}(o)^2$$

Somit erhalten wir für das Potential W der doppelbelegten Scheibe:

$$(E) \qquad W = \sum_{o}^{\infty n} A_{2n+1} P_{2n+1}(v)\, Q_{2n+1}(u)$$

wobei ist:

$$(8) \qquad u = i \mathfrak{S}in\, \lambda$$

$$(12) \qquad v = \sin \vartheta$$

und die A_{2n+1} sich aus (17) ergeben.

Die Reihe (E) konvergiert im allgemeinen sehr rasch und ist daher zur praktischen Verwendung sehr geeignet[1]), was sich auch theoretisch nachweisen lässt.

Es genügt nämlich, die ersten vier Glieder bei einer Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Kugelfunktionen zu berücksichtigen. Denn bildet man die Summe der Fehlerquadrate d. h. $(f - F_0 - F_1 - F_2 - F_3 - F_4)^2 \times$ Oberflächenelement $d\omega$ der Kugel, integriert über die Kugel — wobei

$$f = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \text{Rest}$$

die nach Kugelfunktionen zu entwickelnde Funktion und F_0, $F_1 \cdots$ die einzelnen Glieder seien — und macht diese Summe zu einem Minimum, so zeigt sich, dass die Approximation durch die vier ersten Glieder praktisch vollständig ausreicht[2]). Auf der andern Seite gestaltet sich die Auswertung des W ebenfalls darstellenden Integrals:

$$(18) \qquad W = \frac{1}{2\pi} \int_{(\text{Scheibe})} \frac{\delta\left(\frac{1}{r}\right)}{\delta n}\, d\sigma^{3})$$

wo $d\sigma$ ein Flächenelement der Kreisscheibe und r die Entfernung eines beliebigen Aufpunktes von $d\sigma$ ist, im allgemeinen Falle äusserst kompliziert und beschwerlich[4]).

Zugleich haben wir auch mit der Lösung (E) unseres Potentialproblems etwas anderes erreicht: Eine Entwicklung von (18) nach Kugelfunktionen, deren Argumente u, v als elliptische Koordinaten des betreffenden Aufpunktes gedeutet werden

[1]) Vergl. § 9.

[2]) Vergl. F. Klein, Anwendung der Differential- und Integralgleichung auf Geometrie. Autograph. Vorles. Leipzig 1907 (Neuer Abdruck) S. 197 ff.

[3]) Vergl. G. Kirchhoff, Vorlesungen über Elektrizität und Magnet. S. 94 ff.

[4]) Vergleich mit der Lösung Kimmels (s. Einleitung S. 54) siehe später § 9.

können (vergl. (8) und (12)). Wollte man dieses Resultat auf direktem Wege erhalten, so würde es einen ziemlich grossen Aufwand von Rechnung und Kunstgriffen benötigen, um unser einfaches Resultat zu erhalten.

§ 4.

Konvergenzbetrachtungen.

Im folgenden soll der Nachweis der Konvergenz der unendlichen Reihe (E) des § 3 erbracht worden. Es ist nach (E) des § 3:

$$(1) \qquad W = \sum_{0}^{\infty n} A_{2n+1} P_{2n+1}(v) Q_{2n+1}(u),$$

wo ist:

$$(2) \qquad A_{2n+1} = \frac{(4n+3) P'_{2n+1}(o)}{(2n+1)(2n+2) Q'_{2n+1}(o \cdot i)} \text{ (vergl. § 3, Gl. (17)).}$$

Zum Nachweis der Konvergenz von (1) für von Null verschiedene Werte von u machen wir Gebrauch von der Näherungsformel der Kugelfunktion zweiter Art für grosse n:

$$(3) \qquad Q_{2n+1}(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{\xi^{2n+2}}{\sqrt{1-\xi^2}}\ ^{1}),$$

die für $|\xi| < 1$ gilt. ξ hängt mit u zusammen durch die Beziehung:

$$(4) \qquad u = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right).$$

Da nach (8) des § 3:

$$u = \frac{i}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2}\left(ir + \frac{1}{ir}\right)$$

ist, so wird also

$$(5) \qquad \xi = ir,$$

und wir erhalten aus (3):

$$(6) \qquad Q_{2n+1}(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2n+1}} \frac{i^{2n+2}\, r^{2n+2}}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Ferner ist (vergl. S.):

$$(7) \qquad Q_{2n+1}(o \cdot i) = \frac{2^{2n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n+1)}.$$

Wenden wir nun die Stirlingsche Näherungsformel für n! an, so erhalten wir für grosse n näherungsweise:

$$(8) \qquad Q_{2n+1}(o \cdot i) = (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n\pi}}{2n+1}.$$

---

[1]) Vergl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, I, S. 174.

und somit:

$$(9) \qquad \frac{Q_{2n+1}(u)}{Q_{2n+1}(o\cdot i)} = \sqrt{\frac{2n+1}{n}} \cdot \frac{r^{2n+2}}{1+r^2}.$$

Da $P_{2n+1}(o)$ dem absoluten Betrag nach den Wert 1 nicht übersteigt[1]), also immer endlich bleibt, so konvergiert unsere Reihe (1), da die Majorante eine konvergierende Potenzreihe ist, für alle Werte von r des Intervalls o bis 1 mit Ausnahme des Wertes $r = 1$ gleichmässig und darf daher für diese Werte von r gliedweise differentiiert werden. Für $r = 1$ d. h. $u = o$ geht (1) über in:

$$(10) \qquad \begin{aligned} S(v) &= \sum_{o}^{\infty n} A_{2n+1} \cdot P_{2n+1}(v) \cdot Q_{2n+1}(o\cdot i) \\ &= \sum_{o}^{\infty n} \frac{4n+3}{(2n+1)(2n+2)} \cdot P'_{2n+1}(o) \cdot P_{2n+1}(v), \end{aligned}$$

die für alle Werte von v des Intervalls $o < v \leq 1$ konvergiert und den Wert 1 annimmt. Dieses Resultat wollen wir jetzt direkt verifizieren.

Es ist nach (15) des § 3:

$$P'_{2n+1}(o) = (2n+1)(2n+2) \int_{o}^{1} P_{2n+1}(\mu)\, d\mu .$$

Setzen wir diesen Wert von $P'_{2n+1}(o)$ in (10) ein, so erhalten wir:

$$(11) \qquad S(v) = \sum_{o}^{\infty n} (2n+3) \int_{o}^{1} P_{2n+1}(\mu)\, d\mu \cdot P_{2n+1}(v).$$

Wir betrachten zunächst die Reihe (11) für den speziellen Wert $v = 1$. Dann werden sämtliche $P_{2n+1}(1) = 1$[2]) und wir erhalten:

$$12) \qquad S(1) = \sum_{o}^{\infty n} (4n+3) \int_{o}^{1} P_{2n+1}(\mu)\, d\mu .$$

Für diese Reihe (12) gelingt nun die Summation mittels der

[1]) Vergl. Heine l. c. I, S. 18.
[2]) Vergl. Heine, l. c. S. 12.

Dirichlet'schen Darstellungsweise[1]) der Kugelfunktionen erster Art durch bestimmte Integrale:

$$(13a)\qquad P_n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta} \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos n\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\,d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos n\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}\,d\varphi,$$

$$(13b)\qquad P_n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta} \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\sin(n\varphi)}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\,d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\sin n\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}\,d\varphi,$$

wo das Argument μ gleich $\cos\vartheta$ gesetzt ist.

Wir wollen nun $S(1)$ in zwei Summen zerlegen, indem wir setzen:

$$(14)\qquad S(1) = 2U + T,$$

wo dann ist:

$$(15)\qquad U = \sum_0^{\infty} n\,(2n+1)\int_0^1 P_{2n+1}(\mu)\,d\mu,$$

$$16)\qquad T = \sum_0^{\infty} n\int_0^1 P_{2n+1}(\mu)\,d\mu.$$

[1]) Vergl. P. G Lejeune-Dirichlet, Sur les séries, dont les termes dépendent des deux angles... Journal f. d. reine und angew. Math., Bd. 17 (1837). S. 41; vergl. überhaupt zum folgenden diese Abhandlung.

§ 5.

Fortsetzung: Berechnung von U.

Um U zu berechnen, setzen wir für $P_{2n+1}(\mu)$ den Wert (13b) ein und erhalten:

$$\frac{\pi}{2}U=-\lim_{n=\infty}\left[\int_0^1 d(\cos\vartheta)\int_0^{\vartheta}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\sum_0^n \nu\,(2\nu+1)\sin(2\nu+1)\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\,d\varphi\right.$$

$$\left.+\int_0^1 d(\cos\vartheta)\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\sum_0^n \nu\,(2\nu+1)\sin(2\nu+1)\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}\,d\varphi\right].$$

Nun ist:

$$\sum_0^n \nu\,(2\nu+1)\sin(2\nu+1)\varphi=\sin\varphi+3\sin3\varphi+\cdots+(2n+1)\sin(2n+1)\varphi$$

$$=\sum_1^{2n+1}\nu\,\sin(\nu\varphi)-2\sum_1^n \nu\,\sin(2\nu\varphi).$$

Die letzten Summen lassen sich summieren mittels der Formel:

$$(17)\qquad \sin\varphi+2\sin2\varphi+\cdots n\sin(n\varphi)=-\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)^{1)}$$

Hiernach wird:

$$\sum_0^n \nu\,(2\nu+1)\sin(2\nu+1)\varphi=-\frac{1}{2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)+\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right)$$

und daher:

$$\frac{\pi}{2}U=-\lim_{n=\infty}\int_0^1 d(\cos\vartheta)\int_0^{\vartheta}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}-\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)d\varphi$$

$$+\lim_{n=\infty}\int_0^1 d(\cos\vartheta)\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}-\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)d\varphi,$$

---

[1]) Vergl. z. B. Riemann-Weber, l. c. I, S. 63.

oder:

$$\frac{\pi}{2}U = -\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{\vartheta}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\cdot\frac{d}{d\varphi}\Big(f(\varphi)\Big)d\varphi$$

(18)

$$+\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}\cdot\frac{d}{d\varphi}\Big(f(\varphi)\Big)d\varphi.$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$f(\varphi) = \frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin^{\frac{4n+3}{2}}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \tag{19}$$

Wir wollen das erste Integral mit J_1, das zweite mit J_2 bezeichnen. Betrachten wir das Integral J_1. Mittels der Dirichletschen Formel:

$$\int_0^a dx\int_0^x \varphi(x,y)\,dy = \int_0^a dy\int_y^a \varphi(x,y)\,dx$$

kann die Integrationsfolge vertauscht werden, so dass man erhält:

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{d\varphi}\Big(f(\varphi)\Big)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\,d\vartheta.$$

Führen wir nun die Integration einmal aus und integrieren wir hernach noch teilweise, so ergibt sich:

$$J_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d}{d\varphi}\Big(f(\varphi)\Big)\cdot\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi)\frac{d}{d\varphi}\Big(\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\Big)d\varphi;$$

denn das vor das Integralzeichen tretende Glied $f(\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}$

verschwindet für $\varphi = o$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Die teilweise Integration ist erlaubt, weil $\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}$ innerhalb der Integrationsgrenzen stetig und endlich ist. Setzen wir nun für $f(\varphi)$ seinen Wert aus (19) ein, so erhalten wir:

$$J_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\int_o^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}\right)d\varphi\,.$$

Vermittelst eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen lässt sich der Wert von J_1 leicht angeben. Dieser Satz lautet: „Wenn die Funktion $f(\varphi)$ endlich bleibt von $\varphi = o$ bis $\varphi = h$, wo $o < h \leq \frac{\pi}{2}$, so konvergiert das Integral $\int_o^h f(\varphi)\frac{\sin(k\varphi)}{\sin\varphi}d\varphi$ gegen $\frac{\pi}{2}f(o)$, wenn die positive Grösse k unendlich wird."

Dieser Satz gilt nun auch dann noch, wenn $f(\varphi)$ für einen oder mehrere Werte von φ zwischen o und h unendlich wird, wenn dann nur $\int_o^{\varphi} f(\varphi)\,d\varphi = F(\varphi)$ zwischen o und h endlich und stetig bleibt[1]). Letzteres trifft in unserem Falle zu. Somit konvergiert unser obiges Integral J_1 gegen den Wert:

$$(20)\qquad \lim_{n=\infty} J_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}\right)\right]_{\varphi=o} + \sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{2}\left[\cos\varphi\frac{d}{d\varphi}\left(\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}\right)\right]_{\varphi=o} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\,.$$

Analog lässt sich das Integral J_2 berechnen. Es ist doch:

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_o^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}\frac{d}{d\varphi}\left(f(\varphi)\right)d\varphi$$

[1]) Vergl. Dirichlet, l. c. S. 55.

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}} \cdot \frac{d}{d\varphi}\left(f(\varphi)\right) d\varphi$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}} \frac{d}{d\varphi}\left(f(\varphi)\right) d\varphi .$$

Wenden wir wieder die Dirichlet'sche Formel an, so erhalten wir:

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2} \frac{d}{d\varphi}\left(f(\varphi)\right) d\varphi \int_0^{\varphi} \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}} d\vartheta$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2} \frac{d}{d\varphi}\left(f(\varphi)\right) d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\varphi)}} d\varphi .$$

Hieraus ergibt sich durch einmalige Integration und darauffolgende partielle Integration, die erlaubt ist:

$$J_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\pi} f(\varphi) \frac{d}{d\varphi}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\cos\varphi}\right) d\varphi$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\varphi) \frac{d}{d\varphi}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}\right) d\varphi .$$

Berücksichtigen wir, dass

$$\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\cos\varphi} = \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi ,$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\cos\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi ,$$

und nach (19)

$$(19) \qquad f(\varphi) = \frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin\frac{(4n+3)}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

ist, so erhalten wir:

$$J_2 = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)\cdot\cos\varphi\,d\varphi$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right)\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}\right)d\varphi.$$

Setzen wir nun:

$$\varphi = 2\psi,$$

so wird:

$$\text{(a)}\quad \int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi}\cdot\frac{\cos 2\psi}{\cos\psi}d\psi,$$

$$\text{(b)}\quad \int_0^{\pi}\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(4n+3)\psi}{\sin\psi}\cdot\cos 2\psi\,d\psi,$$

$$\text{(c)}\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}\right)d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin 2\psi}\cdot\frac{d}{d\psi}\left(\cos\psi\sqrt{-\cos 2\psi}\right)d\psi,$$

$$\text{(d)}\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{d}{d\varphi}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}\right)d\varphi$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(4n+3)\psi}{\sin\psi}\cdot\frac{d}{d\psi}\left(\cos\psi\sqrt{-\cos 2\psi}\right)d\psi.$$

Lassen wir n wieder über alle Grenzen ins Unendliche wachsen, so wird nach unserem obigen Satze das Integral (b) gleich π und das Integral (d) gleich Null, wie man sich leicht durch Zerlegen des Integrals in die Differenz zweier Integrale von o bis $\frac{\pi}{2}$ weniger das Integral von o bis $\frac{\pi}{4}$ überzeugt. Wir erhalten so schliesslich:

$$(21)\quad \lim_{n=\infty} J_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi} \cdot \frac{\cos 2\psi}{\cos\psi}\, d\psi$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{n=\infty} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin 2\psi} \frac{d}{d\psi}\left(\cos\psi \sqrt{-\cos\psi}\right) d\psi .$$

Somit wird nach (18), (20) und (21):

$$(22)\quad \frac{\pi}{2} U = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi} \cdot \frac{\cos 2\psi}{\cos\psi}\, d\psi \right.$$

$$\left. - \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin 2\psi} \frac{d}{d\psi}\left(\cos\psi \sqrt{-\cos 2\psi}\right) d\psi \right] .$$

§ 6.

Fortsetzung: Berechnung von T.

Zur Summation der Reihe für T (§ 4, (16)) benötigen wir für $P_{2n+1}(u)$ die Formel (13a) des § 4 und erhalten so:

$$\frac{\pi}{2} T = \lim_{n=\infty} \left[\int_0^1 d(\cos\vartheta) \int_0^{\vartheta} \frac{\cos\frac{\varphi}{2} \sum_0^n \nu \cos(2\nu+1)\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}}\, d\varphi \right.$$

$$\left. + \int_0^1 d(\cos\vartheta) \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin\frac{\varphi}{2} \sum_0^n \nu \cos(2\nu+1)\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\vartheta)}}\, d\varphi \right] .$$

Es ist nun:

$$\sum_{0}^{n}{}_{\nu} \cos(2\nu+1)\varphi = \frac{1}{2}\Big(1 + 2\cos\varphi + 2\cos 2\varphi + \cdots$$

$$+ 2\cos(2n+1)\varphi\Big) - \frac{1}{2}\Big(1 + 2\cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + \cdots$$

$$+ 2\cos 2n\varphi\Big) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right];$$

somit wird, wenn wir zugleich $d\vartheta$ als Differential einführen:

$$(23)\qquad \frac{\pi}{2}T = \frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_{0}^{\vartheta}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\cdot\left[\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]d\varphi$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{n=\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}\cdot\left[\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]d\varphi.$$

Wir wollen die beiden Integrale in (23) mit J_3 und J_4 bezeichnen. J_3 geht mittels der Dirichletschen Formel über in:

$$J_3 = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} - \frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi\int_{\vartheta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\vartheta)}}\,d\vartheta,$$

Durch einmalige Integration ergibt sich:

$$J_3 = \sqrt{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\varphi}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi\,;$$

hieraus nach unserem obigem Satze:

(24) $$\lim_{n=\infty} J_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\pi\,.$$

J_4 zerlegen wir wie J_2 des § 5 in die Differenz der beiden Integrale:

$$J_4 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}\cdot\left[\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}-\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]d\varphi$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}\cdot\left[\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}-\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]d\varphi\,.$$

Wenden wir wieder die Dirichletsche Formel an, so geht J_4 über in:

$$J_4 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\left[\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}-\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]\int_0^{\varphi}\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\left[\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}-\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta}{\sqrt{2(\cos\vartheta-\cos\varphi)}}\,,$$

woraus sich durch Integration ergibt:

$$J_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{1-\cos\varphi}\left[\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}-\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]d\varphi$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}\cdot\left[\frac{\sin\frac{4n+3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}-\frac{\sin(2n+1)\varphi}{\sin\varphi}\right]d\varphi\,.$$

Setzen wir $\varphi = 2\psi$ und beachten, dass $\sqrt{1-\cos\varphi} = \sqrt{2}\cos\frac{\varphi}{2}$

ist, so erhalten wir:

$$J_4 = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(4n+3)\psi}{4\sin\psi}\cdot\sin^2\psi\,d\psi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi\cdot\cos\psi}\sin^2\psi\,d\psi$$

$$-2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+3)\psi}{\sin\psi}\cdot\sin\psi\sqrt{-\cos\psi}\,d\psi + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi\cdot\cos\psi}\cdot\sin\psi\sqrt{-\cos 2\psi}\,d\psi$$

und hieraus wieder für $n = \infty$:

$$(25)\qquad \lim_{n=\infty} J_4 = \lim_{n=\infty}\left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi}\cdot\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\,d\psi\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi}\cdot\frac{\sin\psi\sqrt{-\cos 2\psi}}{\cos\psi}\,d\psi\right],$$

da die beiden anderen Integrale für $n = \infty$ verschwinden. Somit wird nach (23), (24) und (25):

$$(26)\qquad \frac{\pi}{2}T = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \lim_{n=\infty}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi}\cdot\frac{\sin^2\psi}{\cos\psi}\,d\psi\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi}\cdot\frac{\sin\psi\sqrt{-\cos 2\psi}}{\cos\psi}\,d\psi\right].$$

Aus (14), (22) und (26) ergibt sich nun:

$$\frac{\pi}{2}S(1) = \pi U + \frac{\pi}{2}T = \pi - \lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi}\cdot\frac{\cos 2\psi + \sin^2\psi}{\cos\psi}\,d\psi$$

$$+\lim_{n=\infty}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi}\cdot\frac{\sin\psi\sqrt{-\cos 2\psi}+\frac{d}{d\psi}(\cos\psi\sqrt{-\cos 2\psi})}{\cos\psi}\,d\psi.$$

Da nun

$$\frac{\cos 2\psi+\sin^2\psi}{\cos\psi}=\cos\psi,\quad\frac{\sin\psi\sqrt{-\cos 2\psi}+\frac{d}{d\psi}(\cos\psi\sqrt{-\cos 2\psi})}{\cos\psi}=\frac{\sin 2\psi}{\sqrt{-\cos 2\psi}}$$

ist, und

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\psi}\frac{\sin 2\psi}{\sqrt{-\cos 2\psi}}\,d\psi=\sqrt{-\cos 2\psi}$$

für jedes ψ einen endlichen Wert annimmt, so kann nun wieder der oben erwähnte Satz angewendet werden, und wir erhalten:

$$\lim_{n=\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi}\cos\psi\,d\psi=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(4n+2)\psi}{\sin\psi}\cdot\frac{\sin 2\psi}{\sqrt{-\cos 2\psi}}\,d\psi=0,$$

so dass sich schliesslich ergibt:

$$\frac{\pi}{2}S(1)=\frac{\pi}{2}$$

oder

$$S(1)=1.$$

§ 7.

Auf den vorhergehenden speziellen Fall lässt sich nun der allgemeine Fall (vergl. (11) des § 4), wo man v beliebige Werte des Intervalls o bis 1 beilegt, leicht durch eine geometrische Betrachtung zurückführen. Nach einem Satze von Legendre[1]) gilt die Beziehung:

[1]) Vergl. Heine, l. c. I, S. 313.

Lit. Viešoji Valstybinė Biblioteka

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} P_n(\cos\omega)\,d\varphi' = P_n(\cos\vartheta)\,P_n(\cos\vartheta'),$$

wo

$$\cos\omega = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi'$$

ist. Wenden wir diesen Satz an, so können wir (11) des § 4 in der Form schreiben:

$$(28)\qquad \sum_0^{\infty} n\,(4n+3)\int_0^1 P_{2n+1}(\mu)\,P_{2n+1}(\nu)\,d\mu$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_0^{\infty} n\,(4n+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta'\,d\vartheta'\int_0^{\pi} P_{2n+1}(\cos\omega)\cdot d\varphi',$$

wenn wir

$$\nu = \cos\vartheta\,,\quad \mu = \cos\vartheta'$$

setzen. Das allgemeine Glied der Reihe (28) geht in das der Reihe (12) des § 4 über, wenn wir $\cos\vartheta = 1$ setzen; es ist dann nämlich:

$$\cos\omega = \cos\vartheta'\,;\quad \int_0^{\pi} d\varphi' = \pi\,;$$

daher:

$$(29)\qquad \frac{1}{\pi}\sum_0^{\infty} n\,(4n+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta'\,d\vartheta'\int_0^{\pi} P_{2n+1}(\cos\omega)\,d\varphi'$$

$$= \sum_0^{\infty} n\,(4n+3)\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2n+1}(\cos\vartheta')\sin\vartheta'\,d\vartheta',$$

woraus durch Einführung von $\mu = \cos\vartheta'$ Gl. (12) des § 4 folgt.

Nun denken wir uns eine Kugelfläche mit dem Radius 1, auf der (ϑ, o) und (ϑ', φ') bestimmte Punkte markieren. Durch den Punkt (ϑ, o), den wir uns als fest denken wollen, legen wir dann einen Bogen eines grössten Kreises, der gleichfalls als fest betrachtet und zugleich als orientiert gedacht werden soll. Die Lage irgend eines Punktes der Kugelfläche ist bestimmt

durch den zwischen diesem Punkt und dem festen Punkt enthaltenen Bogen eines grössten Kreises und durch den Winkel, welchen dieser Bogen mit jenem festen Bogen bildet. Durch diese beiden sphärischen Polarkoordinaten, die wir mit ϑ'', φ'' bezeichnen wollen, lässt sich offenbar die Lage eines jeden Punktes der Kugelfläche bestimmen, wenn man ϑ'' alle Werte von o bis 2π, φ'' alle Werte von o bis 2π erteilt. Das auf die Koordinaten bezogene Element der Kugelfläche hat zum Ausdruck $\sin\vartheta''\, d\vartheta''\, d\varphi''$. Nun betrachten wir das allgemeine Glied der Reihe (28) und (29). In beiden Fällen ist dasselbe ausgedrückt durch ein Doppelintegral, das sich über einen Quadranten der Kugelfläche erstreckt, und dessen Element ein Produkt aus zwei Faktoren ist. Der erste Faktor, $\sin\vartheta'\, d\vartheta'\, d\varphi'$ d. h. das Flächenelement, ist für beide Fälle derselbe. Ein Unterschied findet nur in bezug auf das Argument des zweiten Faktors P_{2n+1} statt. Im ersten Fall ist dieser Faktor P_{2n+1} eine gewisse Funktion von der sphärischen Entfernung ϑ' des Oberflächenelements vom Koordinatenanfangspunkt, im zweiten Falle ist P_{2n+1} dieselbe Funktion von $\cos\omega$, wo ω durch die Gleichung

$$\cos\omega = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi'$$

gegeben ist. Da nun, wie aus der Trigonometrie bekannt ist, ω die Entfernung der beiden Punkte ist, die die Koordinaten (ϑ, o) und (ϑ', φ') haben, also mit ϑ'' identisch ist, so erhalten wir, wenn wir die Koordinaten ϑ'', φ'' einführen, als allgemeines Glied der Reihe (28), von dem Zahlenkoeffizienten abgesehen, das Doppelintegral $\iint P_{2n+1}(\cos\vartheta'')\sin\vartheta''\, d\vartheta''\, d\varphi''$, wo das Doppelintegral über eine Kugelquadrantenfläche zu erstrecken ist. Da nun das Integral $\iint P_{2n+1}(\cos\vartheta'')\sin\vartheta''\, d\vartheta''\, d\varphi''$, erstreckt über eine beliebige Quadrantenfläche der Einheitskugel, immer denselben Wert annimmt, so ist sein Wert immer gleich dem Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi} P_{2n+1}(\cos\vartheta'')\sin\vartheta''\, d\vartheta''\, d\varphi''$. Hieraus erhellt nun sofort, dass die Natur der Reihen (28) und (29) dieselbe ist. Man kann daher das Resultat von (29) auf die Reihe (28) übertragen, so dass wir ganz allgemein erhalten:

$$\sum_0^{\infty} n\,(4n+3)\,P_{2n+1}(\nu)\int_0^{\frac{\pi}{2}} P_{2n+1}(\mu)\,d\mu = 1\,.$$

Hiermit ist der Nachweis der Konvergenz der Reihe (11) des § 4 erbracht. In ganz analoger Weise liesse sich noch der Nachweis der Konvergenz der einmal gliedweise differentiierten Reihe (E) des § 3 für $u = o$ erbringen[1]) (vergl. Schlussbemerkung des § 2, S. 14).

§ 8.

Verallgemeinerungen.

Wir haben in den vorausgehenden Paragraphen das Potential einer unendlich dünnen Kreisscheibe bei einfacher und Doppelbelegung bestimmt, unter der Bedingung, dass das Potential den Wert $+1$ bezw. $+1$ und -1 auf den beiden Seiten der Scheibe annehmen soll. In ganz ähnlicher Weise lässt sich die Sache durchführen, wenn wir verlangen, dass das Potential auf der Scheibe die Werte einer willkürlich gegebenen Funktion von $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ annehmen soll (also bei axialsymmetrischer Verteilung). Die vorgeschriebene Funktion muss nur nach Kugelfunktionen entwickelbar sein; dies ist für eine Funktion $f(\vartheta)$, welche immer endlich bleibt und nur eine endliche Zahl von Extremwerten besitzt, immer möglich und zwar geschieht die Entwicklung nach Kugelfunktionen mit dem Argu-

---

[1]) Denn man braucht z. B., nur die Konvergenz der nach der Normalen differentiierten Potentialfunktion $\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial z}$ für $u = o$ nachzuweisen und zu berücksichtigen, dass, wie sich aus (11) des § 2 durch Differentiation ergibt

$$Q'_n(u=o) = -(n+1)\,Q_{n+1}(u=o)$$

ist. Setzt man nun näherungsweise $\frac{Q_{2n+2}(u=o)}{Q_{2n+1}(u=o)} = 1$, so kommt man auf eine unendliche Reihe von der Form

$$\sum_{o}^{\infty n} (4n+3)(2n+2) P_{2n+1}(v) \int_{o}^{1} P_{2n+1}(\mu)\, d\mu,$$

deren Konvergenz mutatis mutandis wie oben bewiesen werden kann.

Es genügt nun für den Nachweis, dass W der Laplaceschen Differentialgleichung genügt, dass $\frac{\partial W}{\partial n}$ auch für $u = o$ konvergiert. Denn, wie sich aus der Beziehung

$$\int_{(E)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right) dx\, dy\, dz = \int_{(S)} \frac{\partial W}{\partial n}\, ds$$

ergibt, ist $\int \frac{\partial W}{\partial n}\, ds = o$ gleichbedeutend mit $\Delta W = o$. Aus der Konvergenz von $\frac{\partial W}{\partial n}$ auch für $u = o$ folgt aber sofort jene Gleichung.

mente $\cos\vartheta$ [1]). Wie bereits früher (S. 64) bemerkt wurde, lässt sich eine beliebige willkürliche Funktion durch die ersten vier Glieder hinreichend gut approximieren, wodurch sich unsere Methode auch im allgemeinen Falle als praktisch sehr brauchbar empfiehlt.

§ 9.

Praktische Auswertung.

Es ist vielleicht angezeigt, die praktische Brauchbarkeit der Formel (E) des § 3 für die Berechnung der Potentialwerte darzutun. Wir haben zu diesem Zwecke zuerst die Q_n für rein imaginäre Argumente zu berechnen.

I. Berechnung der $Q_n(i\,\mathfrak{Sin}\,\lambda)$. Dies geschieht am einfachsten mittels der Formel [2]):

$$(1) \qquad Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \log \frac{x+1}{x-1} + R_n(x),$$

wo $R_n(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $(n-1)$ ist. $R_n(x)$ genügt dabei derselben Rekursionsformel wie $P_n(x)$:

$$(2) \qquad (n+1)R_{n+1}(x) - (2n+1)xR_n(x) + nR_{n-1}(x) = 0,$$

wobei ist:

$$R_0 = 0;\ R_1 = -1;\ R_2 = -\frac{3}{2}x.$$

Aus (2) erhält man so:

$$(3) \qquad \begin{aligned} R_3 &= \frac{4 - 15x^2}{6} \\ R_4 &= \frac{55x - 105x^3}{24} \\ R_5 &= -\frac{64 - 735x^2 + 945x^4}{120} \\ R_6 &= -\frac{231x - 1190x^3 + 1155x^5}{80} \\ R_7 &= \frac{256 - 5943x^2 + 19250x^4 - 15015x^6}{560} \end{aligned}$$

Wird nun Formel (1) auf komplexe Werte von x angewendet [3]), so ist die Vieldeutigkeit des Logarithmus dadurch zu bestimmen, dass für alle $x > 1$ der Logarithmus reell wird. Das gibt bei Anwendung auf rein imaginäre Argumente $x = iy$:

---

[1]) Vergl. Heine l. c. I, S. 441.

[2]) Vergl. Heine, l. c. I, S. 141.

[3]) Vergl. F. Neumann, über eine „Entwicklung der in elliptischen Koordinaten ausgedrückten reziproken Entfernung 2 Punkte ..." Journal f. d. r. u. angew. Math. Bd. 37, S. 24; u. Heine, l. c. I, S. 141.

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\lg\frac{1+iy}{1-iy} = -i\,\operatorname{arctg}\frac{1}{y}.$$

Wir erhalten somit für rein imaginäre Argumente $x = iy$ aus (1), (3) und (4) und unter Berücksichtigung der Formel:

$$P_n(iy) = i^n \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\left\{y^n + \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}y^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4\cdot(2n-1)(2n-3)}y^{n-4} + \cdots\right\},$$

$$(5)\quad \begin{cases} Q_0(iy) = -i\,\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y}, \\ Q_1(iy) = y\,\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y} - 1, \\ Q_3(iy) = -\dfrac{2}{5}\left(y^3 + \dfrac{3}{5}y\right)\operatorname{arctg}\dfrac{3}{y} + \dfrac{4+15y^2}{16}, \\ Q_5(iy) = \dfrac{63}{8}\left(y^5 + \dfrac{10}{9}y^3 + \dfrac{5}{21}y\right)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y} - \dfrac{64+735y^2+945y^4}{120}, \\ Q_7(iy) = -\dfrac{429}{16}\left(y^7 + \dfrac{21}{13}y^5 + \dfrac{105}{143}y^3 + \dfrac{35}{429}y\right)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y}, \\ \qquad + \dfrac{256+5943y^2+19250y^4+15015y^6}{560}. \end{cases}$$

Für grössere Werte von y empfiehlt sich zur Berechnung der Q_n die Rekursionsformel[1]:

$$(n+1)\,Q_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,Q_n(x) + n\,Q_{n-1}(x) = 0,$$

wo dann Q_0 und Q_1 aus (5) berechnet werden müssen; allerdings sind bei dieser Berechnungsweise auch die Kugelfunktionen mit geradem Index zu berechnen.

II. Berechnung der Potentialwerte. Entnimmt man die entsprechenden Kugelfunktionen 1. Art einer Kugelfunktionentafel, so erhält man aus der Formel (E) des § 3 folgende Tabelle[2]):

---

[1]) Vergl. Heine, l. c. I, S. 95.

[2]) In der folgenden Tabelle sind die einzelnen Werte mit 10000 vervielfacht.

$\mathfrak{Sin}\lambda$	0,1	0,24	0,3333	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	1	$\sin\vartheta$
0,6	783	1883	2489	3351	3782	4209	4400	4638	4752	4820	4865	
0,8	534	1299	1682	2384	2735	3048	3313	3550	3653	3714	3751	
1	379	932	1223	1757	2045	2301	2590	2741	2837	2893	2929	
1,2	281	694	916	1334	1564	1784	1974	2153	2236	2284	2316	
1,4	216	535	708	1040	1228	1359	1569	1720	1790	1831	1857	
1,6	171	425	563	832	994	1130	1213	1397	1458	1497	1516	
1,8	139	346	458	678	771	927	1043	1152	1204	1233	1254	
2	114	285	378	561	667	770	868	965	1010	1037	1055	
2,2	96	239	308	472	562	650	716	817	857	883	897	
2,4	81	203	270	402	536	565	616	700	741	756	769	
2,6	70	173	231	345	433	478	543	607	639	657	668	
2,8	61	151	202	300	364	416	473	528	555	571	583	
3	52	137	177	264	315	366	416	466	490	504	514	

Was nun die Genauigkeit der nebenstehend berechneten Werte anlangt, so ist sie eine um so bessere, je grösser λ wird. Bei Berücksichtigung von 4 Gliedern ergab sich für $\vartheta = 90^0$ und $\mathfrak{Sin}\lambda = 0{,}6$ 4865, während der genaue Wert[1]) 4877 ist; für $\mathfrak{Sin}\lambda = 0{,}8$ $W = 3751$ (genau: 3753), für $\mathfrak{Sin}\lambda = 1$ $W = 2929$ (genau: 2929); Bei Berücksichtigung von drei Gliedern für denselben Wert $\vartheta = 90^0$ und $\mathfrak{Sin}\lambda = 1{,}2$ $W = 2316$ (genau: 2318); für $\mathfrak{Sin}\lambda = 1{,}4$ $W = 1857$ (genau: 1863); für $\mathfrak{Sin}\lambda = 1{,}6$ $W = 1516$ (genau: 1520); bei Berücksichtigung von nur zwei Gliedern für $\mathfrak{Sin}\lambda = 1{,}8$ $W = 1254$ (genau: 1260); für $\mathfrak{Sin}\lambda = 2$ $W = 1055$ (genau: 1056); für $\mathfrak{Sin}\lambda = 2{,}2$ $W = 899$ (genau: 897), für $\mathfrak{Sin}\lambda = 2{,}4$ $W = 771$ (genau: 769); für $\mathfrak{Sin}\lambda = 2{,}6$ $W = 670$ (genau: 668); für $\mathfrak{Sin}\lambda = 2{,}8$ $W = 581$ (genau: 583); für $\mathfrak{Sin}\lambda = 3514$ (genau: 513). Man sieht: mit wachsendem λ nimmt die Genauigkeit zu, für grössere Werte von λ genügt es, nur zwei Glieder zu berücksichtigen; beachtet man aber, dass die Punkte der Achse ($\vartheta = 90^0$) für unsere Formel die ungünstigsten sind, da die P_n alle ihren grössten Wert 1 annehmen, so kann man sich für Punkte ausserhalb der Achse bei derselben Genauigkeit auf die entsprechende Gliederzahl beschränken.

Da für kleinere λ ($\mathfrak{Sin}\lambda < 0{,}6$) unsere Reihe weniger genaue Werte gibt, so haben wir die Potentialwerte für diese Punkte mittels der „Liebmannschen Ermittelungsmethode“[2]) bestimmt, die die Differentialgleichung des § 2 durch die Differenzengleichung:

$$
\begin{aligned}
&W(\lambda+\varepsilon,\vartheta) + W(\lambda-\varepsilon,\vartheta) + W(\lambda,\vartheta+\varepsilon) + W(\lambda,\vartheta-\varepsilon) \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\lambda}{\mathfrak{Cof}\lambda}\Big(W(\lambda+\varepsilon,\vartheta) - W(\lambda-\varepsilon,\vartheta)\Big) \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{tg}\vartheta\Big(W(\lambda,\vartheta+\varepsilon) - W(\lambda,\vartheta-\varepsilon)\Big) - 4\,W(\lambda\vartheta) = 0
\end{aligned}
\tag{6}
$$

[1]) Die Werte sind wieder mit 10000 multipliziert.

[2]) Vergl. H. Liebmann, Die angenäherte Ermittelung harmonischer Funktionen und konformer Abbildungen, Sitz-ber. d. bayr. Ak. der Wiss. math. nat. Abt. 1918.

ersetzt. Berechnet man sich W für 2 verschiedene Werte von λ ($\mathfrak{Sin}\lambda < 0{,}6$) mittels der Formel (E) des § 3, so kann man mittels der Differenzengleichung (6) $W(\lambda - \varepsilon, \vartheta)$ für kleinere λ berechnen. Wir wählten $\lambda = 0{,}8$ und $\varepsilon = 0{,}2$ bezw. $11^0\,27'\,1''$. Wir lassen die berechnete Tabelle folgen[1]:

λ	90^0	78^0 32' 59''	67^0 5' 58''	55^0 38' 57''	44^0 11' 56''	32^0 45' 55''	21^0 17' 54''	9^0 50' 53''	ϑ
1	23 830	23 509	22 526	20 948	18 282	14 850	10 278	4 954	
0,8	33 597	33 209	32 178	29 980	26 746	22 109	15 771	7 751	
0,6	46 293	45 810	44 556	42 258	38 736	32 978	27 447		
0,4	62 002	61 564	60 440	58 124	54 977	48 984			
0,2	80 266	80 066	79 654	78 072	76 382				

Die in vorstehender Tabelle angegebenen Potentialwerte sind bis auf Fehler in der 3. Dezimale genau. Wählt man ε kleiner, so kann die Genauigkeit erhöht werden. Man kann die Genauigkeit aber auch dadurch noch verschärfen, dass man bei Berechnung der Potentialwerte mittels (6) von den Achsenwerten ausgeht[2]) und das arithmetische Mittel zwischen den auf diese Weise und auf die frühere Art berechneten Werten nimmt.

Wie bereits in der Einleitung[3]) bemerkt wurde, hat H. Kimmel in seiner ebenfalls an der technischen Hochschule in München eingereichten Dissertation unsere Aufgabe durch die zwei Reihen gelöst:

$$W = 1 - r P_1(\sin\vartheta) + \frac{1}{2} r^3 P_3(\sin\vartheta) - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} r^5 P_5(\sin\vartheta) + - \cdots \quad (r < 1),$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2} P_1(\sin\vartheta) - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{r^4} P_3(\sin\vartheta) + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{r^6} P_5(\sin\vartheta) - + \cdots \quad (r > 1);$$

r, ϑ sind dabei die Polarkoordinaten des Aufpunktes. Wie man

---

[1]) Die Werte sind mit 100000 multipliziert.

[2]) Da infolge der Axialsymmetrie $W(\lambda, 90+\varepsilon) = W(\lambda, 90-\varepsilon)$ ist, so wird $\dfrac{W(\lambda, 90+\varepsilon) - W(\lambda, 90-\varepsilon)}{\cos\vartheta}$ für $\vartheta = 90^0$ unbestimmt. Durch Differentiation erhält man:

$$\lim_{\vartheta = 90} \frac{W(\lambda, \vartheta+\varepsilon) - W(\lambda, \vartheta-\varepsilon)}{\cos\vartheta} = 2\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\vartheta = 90-\varepsilon} \cdot \sin\varepsilon \cdot \mathfrak{Sin}\lambda$$

oder, wenn man

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\vartheta = 90-\varepsilon} \text{ näherungsweise durch } \left.\frac{dW}{dz}\right|_{\vartheta = 90} = -\frac{1}{\sqrt{1+z^2}^3} \text{ ersetzt:}$$

$$\lim_{\vartheta = 90^0} \frac{W(\lambda, \vartheta+\varepsilon) - W(\lambda, \vartheta-\varepsilon)}{\cos\vartheta} = \frac{-2}{\sqrt{1+z^2}^3} \cdot \sin\varepsilon \cdot \mathfrak{Sin}\lambda \quad (z = \mathfrak{Sin}\lambda).$$

[3]) Vergl. S. 54.

sofort sieht, konvergieren diese Reihen für r nahe an 1 sehr schlecht; für $r = 1$ liefern sie überhaupt keine brauchbaren Werte, was Kimmel durch eine direkte, näherungsweise, aber beschwerliche Bestimmung des körperlichen Winkels für solche Punkte auszugleichen sucht.

Berechnet man mittels der von Kimmel benutzten zwei Reihen die Potentialwerte für Punkte, die nicht sehr nahe der Achse oder ziemlich weit von ihr entfernt sind, so braucht man schon mehr als 4 Glieder, um eine Genauigkeit auf 3 Dezimalen zu erhalten. Wie genau Kimmel gerechnet hat, lässt sich nicht übersehen, da er es versäumt, eine Tabelle der berechneten Werte anzugeben. Er gibt nur eine dem von Maxwell[1]) auf geometrische Weise erhaltenen Bild sehr ähnliche Aufzeichnung der Strom- und Niveaulinien. Im Gegensatz zur Lösung Kimmels bietet die von uns benutzte Reihe den Vorzug, dass wir keine Fallunterscheidung $r \gtrless 1$ nötig haben, sodann auch, dass sie gut konvergiert (für $\mathfrak{Sin}\,\lambda > 1$ gibt die Berücksichtigung von 3 bezw. 2 Gliedern bereits eine Genauigkeit auf 3 Dezimalen; vergl. oben).

III. Nachweis der Uebereinstimmung unserer Reihe mit der scheinbaren Grösse. Wir wollen diesen Nachweis für Punkte der Achse erbringen. Bekanntlich lässt sich das Potential W auch darstellen durch die scheinbare Grösse der Kreisfläche $\times \frac{1}{2\pi}$[2]). Für Punkte der Achse erhält man durch Berechnung der scheinbaren Grösse:

$$W = 1 - \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}. \tag{7}$$

Setzen wir nun:

$$z = -iu \tag{8}$$

in (7) ein, so geht (7) über in:

$$W = \frac{u - \sqrt{u^2 - 1}}{\sqrt{u^2 - 1}} \quad \left(\sqrt{u^2 - 1} \text{ soll das Vorzeichen von u haben}\right).$$

Setzen wir ferner:

$$\xi = u - \sqrt{u^2 - 1}, \quad \frac{1}{\xi} = u + \sqrt{u^2 - 1}, \tag{9}$$

so wird:

$$W = \frac{2\xi^2}{1 - \xi^2} = 2\xi^2(1 + \xi^2 + \xi^4 + \cdots). \tag{10}$$

---

[1]) Vergl. J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus (deutsch von B. Weinstein) Berlin, 1883, II, Tafel 19.

[2]) Vergl. § 3, Formel (18).

Nehmen wir nun für (10) die Reihenentwicklung an:

$$W = \sum_{0}^{\infty n} a_n Q_n(u)$$

und ersetzen $Q_n(u)$ durch die Potenzreihe[1]):

$$Q_n(u) = 2\,\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\,\xi^{n+1} \cdot\left(1+\frac{n+1}{2n+3}\,\xi^2+\frac{1\cdot 3\cdot(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot(2n+3)(2n+5)}\,\xi^4+\cdots\right),$$

so erhalten wir durch Koeffizientenvergleichung:

$$a_{2n} = 0,$$
$$a_1 = -\frac{3}{2},$$
$$a_3 = -\frac{21}{16},$$
$$a_5 = -\frac{165}{128},$$

und somit:

$$(11)\quad W = -\frac{3}{2}\,Q_1(u) - \frac{21}{16}\,Q_3(u) - \frac{165}{128}\,Q_5(u) - \cdots.$$

Da $u = iz = i\,\mathfrak{Sin}\,\lambda$ mit dem des § 2 (Formel (8)) übereinstimmt, so sieht man, dass die Reihe (E) des § 3 für $v = 1$ mit der Reihe (11) übereinstimmt.

II. Stab.

§ 10.

Potential eines unendlich dünnen Stabes mit kreisförmigem Querschnitt.

Der Stab von unendlich dünnem Querschnitt befinde sich in der z-Achse und erstrecke sich von $z = -1$ bis $z = +1$. Die Problemstellung unterscheidet sich von der des § 1 nur darin, dass V für $x = 0$, $y = 0$ und $-1 \leqq z \leqq +1$ vorgeschriebene Werte annehmen soll[2]). Führen wir wieder Zylinderkoordinaten ein:

---

[1]) Vergl. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, I. S. 129.

[2]) Infolge der Rotationssymmetrie ist V wieder von φ unabhängig.

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, \\ y &= \varrho \sin \varphi, \\ z &= z \end{aligned} \tag{1}$$

und benutzen die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned} \varrho &= \mathfrak{Sin}\, \lambda \cdot \sin \vartheta, \\ z &= \mathfrak{Cof}\, \lambda \cdot \cos \vartheta, \end{aligned} \tag{2}$$

so geht die Laplacesche Differentialgleichung über in:

$$\frac{1}{\mathfrak{Sin}\, \lambda} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\mathfrak{Sin}\, \lambda \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} \right) = 0 . \tag{3}$$

Verfahren wir wie in § 2, so erhalten wir als allgemeines Integral von (3):

$$V = \sum_{0}^{\infty} n \left(a_n P_n(\mathfrak{Cof}\, \lambda) + b_n Q_n(\mathfrak{Cof}\, \lambda) \right) \left(c_n P_n(\cos \vartheta) + Q_n(\cos \vartheta) \right)^{1}). \tag{4}$$

Da V im Unendlichen d. h. für $\lambda = \infty$ verschwinden soll und ferner im ganzen Raum endlich, stetig und eindeutig sein muss, so müssen sämtliche a_n und d_n verschwinden. Somit nimmt V die Form an:

$$V = \sum_{0}^{\infty} n \, A_n P_n (\cos \vartheta) \, Q_n (\mathfrak{Cof}\, \lambda), \tag{5}$$

wo sich die A_n aus den vorgeschriebenen Werten von V auf dem Stabe bestimmen. Hieraus erhält man z. B. im Falle des leitenden Stabes sofort die Lösung. Für $\lambda = 0$ soll $V = 1$ werden. Da nur $P_0 = 1$ von $\cos \vartheta$ unabhängig ist, so müssen sämtliche A_n mit Ausnahme von A_0 verschwinden. Wie sich aus (11) des § 2 ergibt, ist:

$$Q_0 (\mathfrak{Cof}\, \lambda) = \log \frac{\mathfrak{Cof}\, \lambda + 1}{\mathfrak{Cof}\, \lambda - 1};$$

somit erhält man für A_0:

$$A_0 = \frac{1}{\left(\log \dfrac{\mathfrak{Cof}\, \lambda + 1}{\mathfrak{Cof}\, \lambda - 1} \right)_{\lambda = 0}} .$$

V wird also in endlicher Entfernung vom Stabe unendlich klein. Die Gesamtmasse ergibt sich leicht aus dem Verhalten von V im Unendlichen, wo $V = \frac{m}{R}$ wird, wenn m die Gesamtmasse und R die unendlich grosse Entfernung vom Stabe bedeutet. Da

[1]) Auch hier wäre der Nachweis zu erbringen, dass V der Laplaceschen Gleichung tatsächlich genügt. (Vergl. § 2.)

$$\log \frac{\mathfrak{Cof}\lambda + 1}{\mathfrak{Cof}\lambda - 1} = \frac{2}{\mathfrak{Cof}\lambda} + \frac{2}{3\,\mathfrak{Cof}\lambda^3} + \cdots$$

ist, so erhalten wir, bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung in $\frac{1}{\mathfrak{Cof}\lambda}$:

$$V = \frac{2}{\log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}\Bigg|_{\varepsilon = o} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Cof}\lambda}.$$

Nun wird $\mathfrak{Cof}\lambda$ in derselben Ordnung unendlich wie R; somit ergibt sich:

$$m = \frac{2}{\log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}\Bigg|_{\varepsilon = o}.$$

Die Gesamtmasse wird also ebenfalls unendlich klein. Da $\log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=o} = \log \frac{2}{\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=o}$ ist, so sehen wir, dass unser Resultat identisch ist mit dem von Kirchhoff[1]) aus dem verlängerten Rotationsellipsoid abgeleiteten, wenn wir berücksichtigen, dass $\mathfrak{Cof}\lambda = \sqrt{u^2+1}$ bei dem Kirchhoffschen Ausdruck ist:

$$V = \frac{m}{2} \log \frac{\sqrt{u^2+1}+1}{\sqrt{u^2+1}-1}.$$

§ 11.

Das logarithmische Potential einer geraden Strecke.

Die mit Masse belegte Strecke sei in der X-Achse gelegen und erstrecke sich von -1 bis $+1$. Wir haben dann die Aufgabe, eine in der ganzen Ebene endliche und stetige Funktion V zu bestimmen, die den folgenden Bedingungen genügt:

1) $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = o$.

2) $\frac{\partial V}{\partial y}$ stetig mit Ausnahme, wenn $y = o$ und $-1 \leqq x \leqq +1$.

3) V bleibt im Unendlichen endlich (bei verschwindender Gesamtmasse).

4) $V = f(x)$, wenn $y = o$ und $-1 \leqq x \leqq +1$.

Führt man wieder die elliptischen Koordinaten

(1)
$$x = \mathfrak{Cof}\lambda \cdot \cos\vartheta,$$
$$y = \mathfrak{Sin}\lambda \cdot \sin\vartheta$$

[1]) Vergl. G. Kirchhoff, Vorlesungen ... l. c. S. 37.

in $\Delta V = o$ ein, so ergibt sich als allgemeine Lösung von $\Delta V = o$ der Ansatz:

$$(2)\quad V = (a_0\lambda + b_0)(c_0\vartheta + d_0) + \sum_1^{\infty n} (a_n e^{n\lambda} + b_n e^{-n\lambda})\left(c_n \cos(n\vartheta) + d_n \sin(n\vartheta)\right).$$

Im Unendlichen d. h. für $\lambda = \infty$ soll V endlich bleiben. Dies tritt ein, wenn alle $a_n = o$ sind. Da durch obige 4 Bedingungen V eindeutig bestimmt ist, so muss auch $c_0 = o$ sein. So erhält man für V einen Ausdruck von der Form:

$$(3)\quad V = A_0 + 2\sum_1^{\infty n}\left(A_n \cos(n\vartheta) + B_n \sin(n\vartheta)\right) e^{-n\lambda}.$$

Die Konstanten A_n und B_n bestimmen sich aus den Werten der Funktion $f(x)$, die V für $\lambda = o$ annehmen soll. Da für $\lambda = o$ $x = \cos\vartheta$ wlrd, so haben wir $f(\cos\vartheta)$ in eine Fouriersche Reihe mit dem Argument ϑ zu entwickeln:

$$(4)\quad f(\vartheta) = A_0 + 2\sum_o^{\infty n}\left(A_n \cos(n\vartheta) + B_n \sin(n\vartheta)\right),$$

wo dann ist:

$$(5)\quad A_n = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} f(\vartheta)\cos(n\vartheta)\,d\vartheta,\quad B_n = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} f(\vartheta)\sin(n\vartheta)\,d\vartheta.$$

Hiermit sind die A_n und B_n unserer Reihe (3) und damit auch V bestimmt[1]). Wir geben einige Beispiele:

1) $f(x) = +1$, wenn $o < x < 1$ oder $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$,

2) $f(x) = -1$, wenn $-1 < x < o$ oder $\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{2}$.

Es soll also V sein Vorzeichen nicht ändern, wenn ϑ durch $-\vartheta$ ersetzt wird. Daher müssen sämtliche B_n verchwinden. Ferner soll V sein Vorzeichen ändern, wenn ϑ um π zunimmt; es müssen daher alle A_n mit geradem Index n samt A_0 verschwinden. Die noch zu bestimmenden Koeffizienten ergeben sich aus der bekannten Reihe:

$$(6)\quad \frac{\pi}{4} = \cos\vartheta - \frac{\cos 3\vartheta}{3} + \frac{\cos 5\vartheta}{5} - \frac{\cos 7\vartheta}{7} + - \cdots,$$

---

[1]) Vergl. Anm. 1 auf S. 87. Dieser Beweis liesse sich hier wohl auch ähnlich gestalten wie der von Harnack für das Innere einer belegten Kurve; vergl. Harnack, Grundlagen der Theorie des logarithm. Potentials 1887. Leipzig. S. 66 ff.

die für $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ Gültigkeit hat. Wir finden so:

$$2A_1 = \frac{4}{\pi},$$

$$2A_3 = -\frac{4}{3\pi},$$

$$2A_5 = \frac{4}{5\pi},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2A_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu 4}{(2\nu+1)\pi},$$

und somit für V:

$$(7)\quad V = \frac{4}{\pi}\left\{e^{-\lambda}\cos\vartheta - \frac{1}{3}e^{-3\lambda}\cos 3\vartheta + \frac{1}{5}e^{-5\lambda}\cos 5\vartheta - + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}e^{-(2n+1)\lambda}\cos(2n+1)\vartheta + \cdots\right\}$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty{}^n (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot e^{-(2n+1)\lambda}\cos(2n+1)\vartheta .$$

Diese Reihe lässt sich leicht summieren. Betrachten wir den Ausdruck:

$$\log\frac{1+ie^{-\lambda+i\vartheta}}{1-ie^{-\lambda+i\vartheta}} = 2i\left\{e^{-\lambda+i\vartheta} - \frac{1}{3}e^{3(-\lambda+i\vartheta)} + - \cdots\right\}$$

$$= 2i\left\{e^{-\lambda}(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) - \frac{1}{3}e^{-3\lambda}\cdot(\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta) + \cdots\right\}.$$

so sehen wir, dass die Summe $\sum_0^\infty{}^n (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)} e^{-(2n+1)\lambda}$ $\cdot \cos(2n+1)\vartheta$ bis auf den Faktor i gleich der Hälfte des Imaginärteils des Logarithmus auf der linken Seite ist, also gleich $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{Sin}\,\lambda}$. Es wird somit:

$$(8)\quad 2\sum_0^\infty{}^n (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} \cdot e^{-(2n+1)\lambda} \cdot \cos(2n+1)\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{Sin}\,\lambda}$$

und daher:

$$V = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{Sin}\,\lambda} \quad \left(\text{arc von } -\frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{\pi}{2}\right).$$

Führen wir wieder x, y ein durch die Beziehungen:

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{1+x^2+y^2-\sqrt{(1+x^2+y^2)^2-4x^2}}{2}}$$

$$\mathfrak{Sin}\,\lambda = \sqrt{\frac{-1+x^2+y^2+\sqrt{(-1+x^2+y^2)^2-4y^2}}{2}}, \text{ (vergl. Gl. (1))}$$

so ergibt sich:

$$V = \pm\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2+y^2-\sqrt{(1+x^2+y^2)^2-4x^2}}\sqrt{1-x^2-y^2+\sqrt{(1-x^2-y^2)^2-4y^2}}}{2y},$$

wo das — Zeichen gilt, wenn:

$$\left\{\begin{matrix} x>0, & y<0 \\ x<0, & y>0 \end{matrix}\right\},$$

das + Zeichen, wenn:

$$\left\{\begin{matrix} x>0, & y>0 \\ x<0, & y<0 \end{matrix}\right\},$$

und der arc von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen ist.

Die lineare Dichte ergibt sich aus der Beziehung:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_- = -2\pi\varkappa.$$

Es ist nun:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_+ = -\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_- = \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{y=o} = \frac{-2}{\pi\cdot\sin\vartheta\cos\vartheta};$$

somit erhalten wir:

$$\varkappa = \frac{2}{\pi^2\sin\vartheta\cdot\cos\vartheta} = \frac{2}{\pi^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

Die Gesamtmasse

$$m = \int_{-1}^{+1} \varkappa\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$$

ist ein Integral, dessen Hauptwert Null ist (vergl. die Bedingung 3) auf S. 88; vergl. auch dazu Plemelj, Potentialtheoretische Untersuchungen, 1911, S. 4).

Die Richtigkeit unseres Resultats lässt sich leicht nachprüfen. Wie eine kleine Rechnung zeigt, genügt V tatsächlich

der Laplaceschen Differentialgleichung $\Delta V = o$. Ferner erfüllt V samt seinen ersten Ableitungen die vorgeschriebenen Stetigkeitsbedingungen. Im Unendlichen wird $V = o$, bleibt also endlich. Auf der belegten Strecke wird $V = 1$ für $o < x < 1$ und $V = -1$, wenn $-1 < x < o$. Somit sind auch die Randbedingungen erfüllt.

Dasselbe Beispiel behandelt M. Hafen[1]) in der bereits erwähnten Abhandlung. Er fand als Lösung des Problems:

$$V = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Beachtet man die Beziehung:

$$\arcsin u = \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

so erhält man aus unserer obigen Lösung:

$$V = \pm \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{1+x^2+y^2} - \sqrt{(1+x^2+y^2)^2 - 4x^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}$$

wo das $+$ Zeichen zu wählen ist, wenn x, y gleichzeichig, das $-$ Zeichen, wenn x, y ungleichzeichig sind. Da ferner

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} - \sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{2(1+x^2+y^2 - \sqrt{(1+x^2+y^2)^2 - 4x^2}}$$

ist, so sieht man, dass die Lösung von Hafen nicht ganz exakt ist. Einmal berücksichtigt sie die Vorzeichen nicht, was bei einer derart komplizierten Methode wie bei der Hafens leicht vorkommen kann. Sodann ist $-x+1$ mit $1-x$ vertauscht. Letzteres übt allerdings auf das Resultat im allgemeinen Falle keinen Einfluss aus. Da man aber unter $\sqrt{(x-1)^2}$ im allgemeinen $x-1$ versteht, so erfüllt V die Randbedingung nicht.

Wir geben im folgenden noch eine andere Lösung unseres Problems, die ihren Ausgang von der Integralgleichung erster Art nimmt, die unser Problem charakterisiert:

$$(9) \qquad f(x) = \int_{-1}^{+1} \varkappa(x') \log \frac{1}{\varrho} \cdot dx',$$

wo $\varrho = |x - x'|$ und $\varkappa(x')$ die lineare Dichte in dem Punkt x' ist, ein Verfahren, das sich ganz allgemein beim Problem dieses Paragraphen hätte anwenden lassen[2]). Da die Theorie der

[1]) Vergl. l. c. S. 532 ff.

[2]) In anderer Weise, mit Hilfe von Integralgleichungen zweiter Art, behandelte Plemelj das ähnliche Problem der Ellipse ganz allgemein: vergl. Plemelj, Potentialth. Untersuchungen, S. 95 ff.

Integralgleichungen gezeigt hat, dass diese Integralgleichung nur e i n e Lösung besitzt[1]), so haben wir damit den Vorteil erreicht, von etwaigen Konnvergenzbetrachtungen Abstand nehmen zu können.

Setzen wir:

$$(10) \qquad x = \cos\vartheta, \quad x' = \cos\vartheta', \quad dx' = -\sin\vartheta'\, d\vartheta',$$

so wird:

$$\log\frac{1}{\varrho} = \log\frac{1}{|\cos\vartheta' - \cos\vartheta|}.$$

Nun ist:

$$\cos\vartheta - \cos\vartheta' = -2\sin\frac{\vartheta+\vartheta'}{2}\sin\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}$$

$$= \frac{\left\{e^{i\frac{\vartheta+\vartheta'}{2}} - e^{-i\frac{\vartheta+\vartheta'}{2}}\right\}\left\{e^{i\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}} - e^{-i\frac{\vartheta-\vartheta'}{2}}\right\}}{2},$$

$$\log(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = -\log 2 + \log e^{i\vartheta}\left\{1 - e^{-i(\vartheta+\vartheta')}\right\}\left\{1 - e^{-i(\vartheta-\vartheta')}\right\}.$$

Hieraus bekommt man durch Entwicklung des Logarithmus auf der rechten Seite:

$$\log(\cos\vartheta - \cos\vartheta') = -\log 2 + i\vartheta - \Big(\cos(\vartheta+\vartheta') + i\sin(\vartheta+\vartheta') + \frac{1}{2}(\cos 2(\vartheta+\vartheta') + i\sin 2(\vartheta+\vartheta')) + \cdots\Big)$$

$$-\Big(\cos(\vartheta-\vartheta') + i\sin(\vartheta-\vartheta') + \frac{1}{2}(\cos 2(\vartheta-\vartheta') + i\sin 2(\vartheta-\vartheta')) + \cdots\Big).$$

Der reelle Teil dieses Ausdrucks ist gleich $\log|\cos\vartheta - \cos\vartheta'|$; also wird:

$$\log|\cos\vartheta - \cos\vartheta'| = \log\varrho = -\log 2 - \sum_1^\infty \frac{\cos n(\vartheta+\vartheta') + \cos n(\vartheta-\vartheta)}{n},$$

oder, da

$$\cos n(\vartheta+\vartheta') + \cos n(\vartheta-\vartheta') = 2\cos(n\vartheta)\cos(n\vartheta'),$$

$$\log\varrho = -\log 2 - 2\sum_1^\infty \frac{\cos(n\vartheta)\cos(n\vartheta')}{n}.$$

---

[1]) Vergl. O. D Kellogg, Zur Theorie der Integralgleichungen und das Dirichlet'sche Prinzip. Diss. 1903, Göttingen. S. 16 ff.

Biblioteka Politechniki Warszawskiej

Wir erhalten somit für $\log \frac{1}{\varrho}$ die Reihenentwicklung:

$$(11) \qquad \log \frac{1}{\varrho} = \log 2 + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(n\vartheta) \cdot \cos(n\vartheta')}{n}.$$

Setzen wir jetzt:

$$(12) \qquad \varkappa(x') = \varkappa(\cos\vartheta') = \frac{1}{\sin\vartheta'} \left[\alpha_0 + 2 \sum_{1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\vartheta')\right],$$

so geht (9) über in:

$$(13) \quad \frac{4}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)\vartheta}{2n+1} = \int_0^{\pi} \left[\alpha_0 + 2 \sum_{1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\vartheta')\right] \cdot \left[\log 2 + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(n\vartheta)\cos(n\vartheta')}{n}\right] d\vartheta'.$$

Nun ist doch:

$$(14) \qquad \int_0^{\pi} \cos(n\vartheta')\, d\vartheta' = \begin{cases} \pi & \text{für } n = 0, \\ 0 & \text{für } n \neq 0; \end{cases}$$

ferner, wie sich aus der Beziehung

$$(15) \qquad \cos(m\vartheta')\cos(n\vartheta') = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)\vartheta' + \cos(m+n)\vartheta'\right)$$

durch Integration ergibt:

$$\int_0^{\pi} \cos(m\vartheta')\cos(n\vartheta')\, d\vartheta' = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } m = n; \end{cases}$$

so ergibt sich aus (13):

$$\alpha_0 = 0; \quad \alpha_{2n} = 0; \quad \alpha_{2n+1} = (-1)^n \frac{2}{\pi}.$$

Man findet daher für die Dichte $\varkappa$:

$$\varkappa = \frac{4}{\pi^2 \sin\vartheta} \left\{\cos\vartheta - \cos 3\vartheta + \cos 5\vartheta - + \cdots\right\}.$$

Diese Reihe lässt sich leicht summieren. Es ist doch:

$$\frac{1}{2\cos\vartheta} = \frac{1}{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}} = \frac{e^{i\vartheta}}{1-e^{-2i\vartheta}} = e^{i\vartheta}\left(1-e^{2i\vartheta}+e^{4i\vartheta}-+\cdots\right)$$

$$= \cos\vartheta + i\sin\vartheta - (\cos 3\vartheta + i\sin 3\vartheta) + \cdots,$$

woraus für reelle ϑ folgt:

$$\frac{1}{2\cos\vartheta} = \cos\vartheta - \cos 3\vartheta + \cos 5\vartheta - + \cdots,$$

welche Entwicklung Gültigkeit hat, solange $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ist. Wir bekommen somit für die Dichte denselben Wert wie oben:

$$\varkappa = \frac{4}{\pi^2 \sin 2\vartheta}.$$

Setzen wir jetzt:

$$V = \int_{-1}^{+1} \varkappa(x') \log\frac{1}{\varrho}\, dx', \tag{16}$$

wo nun $\varrho = \sqrt{(x-x')^2 + y^2}$ ist, also der Aufpunkt nicht auf der belegten Strecke, sondern beliebig gelegen ist, und machen wir die Substition:

$$\begin{aligned} x &= \mathfrak{Cof}\lambda \cdot \cos\vartheta\,;\ x' = \cos\vartheta' \\ y &= \mathfrak{Sin}\lambda \cdot \sin\vartheta\,;\ dx' = -\sin\vartheta'\, d\vartheta', \end{aligned} \tag{17}$$

so lässt sich V leicht berechnen. Wir brauchen nur $\log\frac{1}{\varrho}$ in eine Fourier'sche Reihe mit dem Argumente ϑ zu entwickeln. Man findet, indem man ganz analog verfährt wie bei der Entwicklung von $\log\frac{1}{|\cos\vartheta - \cos\vartheta'|}$, für $\log\frac{1}{\varrho}$ folgende Reihenentwicklung:

$$\log\frac{1}{\varrho} = \log 2 + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-n\lambda}\cos(n\vartheta)\cos(n\vartheta')}{n}.$$

Setzen wir diesen Wert für $\log\frac{1}{\varrho}$ in (16) ein, so erhalten wir bei Ausführung der Integration und Berücksichtigung der Formeln (14), (15) und (17):

$$V = \frac{4}{\pi}\left[e^{-\lambda}\cos\vartheta - \frac{e^{-3\lambda}}{3}\cos 3\vartheta + \frac{e^{-5\lambda}}{5}\cos 5\vartheta - + \cdots\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\cos\vartheta}{\mathfrak{Sin}\lambda}.$$

II. Fall der doppelbelegten Strecke:

$f(x)=+1$ auf der oberen Seite der Strecke d. h. für $o<\vartheta<\pi$;
$f(x)=-1$ auf der unteren Seite der Strecke d. h. für $\pi<\vartheta<2\pi$.

In diesem Falle müssen sämtliche A_n und alle B_n mit geradem Index verschwinden. Die noch zu bestimmenden Koeffizienten $B_{2\nu+1}$ bestimmen sich aus der bekannten Formel, die sich aus (6) durch die Substition

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta'$$

ergibt:

$$\frac{\pi}{4} = \sin\vartheta' + \frac{\sin 3\vartheta'}{3} + \frac{\sin 5\vartheta'}{5} + \cdots,$$

die im Intervall $o<\vartheta'<\pi$ gültig ist. Hieraus ergibt sich:

$$B_1 = \frac{4}{\pi},$$

$$B_3 = \frac{4}{3\pi},$$

$$B_5 = \frac{4}{5\pi},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi};$$

daher für das Potential W:

$$W = \frac{4}{\pi}\left\{e^{-\lambda}\sin\vartheta + \frac{e^{-3\lambda}\sin 3\vartheta}{3} + \frac{e^{5\lambda}\sin 5\vartheta}{5} + \cdots\right\}.$$

Diese Reihe lässt sich leicht summieren. Wir brauchen nur in (8) ϑ durch $\frac{\pi}{2} - \vartheta$ zu ersetzen. So erhalten wir:

$$W = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sin\vartheta}{\mathfrak{Sin}\,\lambda}\left(\text{arc von } -\frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{\pi}{2}\right).$$

Über Paare von isogonalen isometrischen Kurven.

Von Fia Kapfer in München.

Šis darbas iškelia diferencialines lygtis, nuo kurių priklauso nustatymas erdvinės kreivosios, izogonalinės duotajai. Svarstomos įvairios galimybės klausimui spręsti atsižvelgiant į ortogonaliniai - izometrines kreives ir geometrinis pagrindinių lygčių reiškimas. Taip pat ypatingai ištiriamas ryšys su begaliniai mažu erdvinių kreivių sulenkimų.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit handelt von Paaren isogonaler isometrischer Kurven. Die Bestimmung derselben ist identisch mit der Lösung des Problems der unendlich kleinen Verbiegung biegsamer und nicht dehnbarer Raumkurven.

In bisher veröffentlichten Ausführungen über „Kurvenpaare" werden unter diesem Begriff zwei Kurven verstanden welche „durch gemeinsame Normalen von konstanter Länge punktweise aufeinander bezogen sind"[1]). In diesem Zusammenhang finden sich Hinweise auf isometrische Kurven bei Schell[2]) und bei Voss[3]). Arbeiten, welche die Isogonalität[4]), speziell

[1]) A. Voss, Ueber Kurvenpaare im Raume. Sitzungsberichte der Kgl. Bayer. Akademie der Wissenschaften, München 1909, S. 4.

[2]) Schell - Salkowski, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Leipzig und Berlin, 1914, S. 158/159.

[3]) Voss, a. a. O. S. 32—35.

[4]) Aoust, Sur les trajectoires qui coupent, sous un angle constant, les courbes méridiennes des surfaces de révolution. Journ. de Math., Paris 1846, XIX, S. 184–193.

Aoust, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Paris 1876, S. 248–266, 368–378.

Lancret, Mémoire sur les développoïdes des courbes planes, des courbes à double courbure et des surfaces développables. Mémoires, présentés par divers savans, Paris 1811, Bd. II, S. 1—79.

H. Molins, Sur les trajectoires qui coupent sous un angle donné les tangentes à une courbe à double courbure. Journ. de Math. Paris 1843, Bd. VIII, S. 132–145.

E. Salkowski, Schraubenlinien und Loxodromen. Sitzungsber. der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Leipzig und Berlin. 7. Jahrg. 1908, S. 64 ff.

G. Scheffers, Ueber Loxodromen, Leipziger Berichte 1902. 54. Bd., S. 363 ff.

die Orthogonalität[5]) von zwei Raumkurven zum Gegenstande haben und dabei von vorstehender Definition eines Kurvenpaares absehen, behandeln durchweg spezielle Probleme: Bertrandsche Kurven, Filar- und Plan-Evolventen, -Evoluten, -Evolventoïden und -Evolutoïden und entbehren jedes Hinweises auf einen Zusammenhang mit der Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegung der Raumkurven. Die Frage nach der Möglichkeit, allgemein die mit einer gegebenen Kurve korrespondierenden isogonalen Kurven, speziell die gleicher Bogenlänge, — ohne Beziehung auf eine Fläche, auf welcher sie liegen, — zu bestimmen, wurde, soweit der Verfasserin der Arbeit bekannt ist, bis jetzt noch nicht behandelt. Bei dieser Problemstellung müssen ersichtlich die oben angeführten Kurven aus den die Isogonalität zweier Kurven allgemein definierenden Gleichungen darstellbar sein.

Der Inhalt der Arbeit gliedert sich folgendermassen:

Der I. Teil beschäftigt sich mit der Aufstellung des Problems und der Angabe der Differentialgleichung, von welcher die Bestimmung der einer Raumkurve entsprechenden isogonalen Kurven abhängt. Die Aufgabe wird spezialisiert in die Darstellung isogonal-isometrischer Kurven. Der II. und III. Paragraph bringen die geometrische Deutung der Grundgleichungen und den Nachweis der Übereinstimmung der letzteren mit den die unendlich kleine Verbiegung von Raumkurven charakterisierenden Gleichungen, der letzte Teil verschiedene Möglich-

---

[5]) Aoust, Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Paris 1876, S. 225–248.

L. Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig und Berlin, 1910. S. 23—30.

F. Frenet, Sur les courbes à double courbure. Journ. d. Math. Paris, Bd. XVII, 1852. S. 437—448.

Lancret, Mémoire sur les courbes à double courbure. Mémoires, présentés par divers savans. Paris, Bd. I, 1806, S. 416–454.

R. v. Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig, 1908, Bd. I, S. 272—290.

Liouville, Note sur les courbes à double courbure, Paris, 1850, S. 547–569.

H. Molins, De la détermination, sous forme intégrable, des équations des développées des courbes à double courbure. Journ. de Math. Paris, 1843, Bd. VIII, S. 379—391.

D. Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie. Paris 1850. S. 392–421.

De Saint-Venant, Mémoire sur les lignes courbes non planes. Journ. d. l'Ecole Royale Polyt. Paris, 1845, Bd. 13, 30. H. S. 1—77.

G. Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume. Leipzig 1901. S. 294—307, S. 322—327.

Serret, Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la Théorie des courbes à double courbure, Journ. de Math. 1853, Bd. 18, S. 1—41.

Steiner, Einige allgemeine Eigenschaften der Kurven von doppelter Krümmung. Berichte über d. Verhandl. d. Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1839, Sitzung am 25. April.

keiten der Lösung des Problems, mit besonderer Berücksichtigung der orthogonal-isometrischen Kurven.

Es ergeben sich dabei zahlreiche Formeln, durch welche die Beziehungen zwischen der Ausgangskurve C und der isogonal-isometrischen Kurve C_1, namentlich den charakteristischen Triëdern (Tangente, Hauptnormale, Binormale) beider Kurven, dargestellt sind. Die Gegenseitigkeit der Relationen zwischen den Kurven C und C_1 wird geprüft. — Für den Gang der Untersuchung wurde der Weg analytischer Rechnung eingeschlagen; der geometrische Inhalt der Formeln ist oft einfach deutbar und wird in Worten festgestellt. Bei den Beispielen wurde meist die Darstellung der Raumkurven durch ihre natürlichen Koordinaten verwendet.

Die Anregung zu vorliegender Arbeit, die im wesentlichen den Gegenstand meiner an der Technischen Hochschule zu München eingereichten Dissertation bildete, erhielt ich durch Herrn Geheimen Rat Dr. A. Voss, Professor an der Universität München, wertvollen Rat bei der Ausführung durch Herrn Dr. K. Doehlemann, Professor an der Technischen Hochschule München. Beiden Herren sage ich an dieser Stelle meinen aufrichtigen Dank.

---

§ 1.

Aufstellung des Problems.

Zwei Kurven C und C_1, die sich punktweise so zugeordnet sind, dass die Tangenten in den korrespondierenden Punkten unter konstantem Winkel ω geneigt sind, bilden ein Paar von isogonalen Kurven.

Es seien x, y, z die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte P einer Kurve C im Raume, der Bogen s die unabhängige Variable. C sei in der Parameterdarstellung gegeben:

$$x = f_1(s)$$
$$y = f_2(s)$$
$$z = f_3(s);$$

dabei wird vorausgesetzt, dass die Funktionen f_1, f_2, f_3, wenigstens in einem gewissen Bereich, stetig und differentiierbar sein sollen.

Mit $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; $\cos\varphi$, $\cos\chi$, $\cos\psi$; $\cos\mathfrak{a}$, $\cos\mathfrak{b}$, $\cos\mathfrak{c}$;

$$\frac{1}{r} = \frac{d\tau}{ds};\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\vartheta}{ds};\quad \frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{dt}{ds};\quad H;\quad \mathfrak{R}$$

seien der Reihe nach die Richtungskosinus der Tangente, der Haupt-, der Binormale und der rektifizierenden Geraden, die Krümmung $= \frac{\text{Kontingenzwinkel}}{\text{Bogenelement}}$, die Torsion $= \frac{\text{Schmiegungswinkel}}{\text{Bogenelement}}$ die totale Krümmung $= \frac{\text{Winkel zweier benachbarten Hauptnormalen}}{\text{Bogenelement}}$, der Winkel zwischen Tangente und rektifizierender Geraden, der Radius der Schmiegungskugel von C bezeichnet. Für die Kurve C_1 haben dieselben Bezeichnungen mit dem Index 1 analoge Bedeutung.

Die der Definition isogonaler Kurven entsprechende Bedingungsgleichung für ein Paar derselben lautet sonach:

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 = \cos\omega = k \tag{1}$$

oder:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dy_1}{ds_1} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz_1}{ds_1} = k. \tag{1a}$$

Die vollständige Integration dieser Gleichung gibt demnach die Lösung dessen, was wir das Problem der Isogonalität der Kurven C und C_1 nennen.

Gleichung (1a) kann ersetzt werden durch das System der drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx_1 &= (c\,dy - b\,dz + k\,dx)\,\frac{ds_1}{ds} \\ dy_1 &= (a\,dz - c\,dx + k\,dy)\,\frac{ds_1}{ds} \\ dz_1 &= (b\,dx - a\,dy + k\,dz)\,\frac{ds_1}{ds}, \end{aligned} \tag{2}$$

[6]

wobei a, b, c als beliebige Funktionen von s gewählt werden können.

Ferner ist das Verhältnis entsprechender Bogenelemente der beiden Kurven C_1 und C, $\frac{ds_1}{ds}$, eine willkürliche Funktion von s.

Wir setzen nun weiter voraus, dass

$$\frac{ds_1}{ds} = 1, \tag{3}$$

[7]

---

[6] Vergl. hierzu Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris 1896, Bd. 4, S. 8.

[7] Die Annahme eines konstanten, aber von 1 verschiedenen Verhältnisses der Bogenelemente beider Kurven würde nur eine Massstabsveränderung der Koordinaten der Kurve C_1 bedingen, keine wesentlich neuen Gesichtspunkte schaffen, weshalb dieser Fall unberücksichtigt blieb.

d. h. es seien die in korrespondierenden Punkten isogonalen Kurven C und C_1 zugleich isometrisch.

Hierdurch erhalten wir aus Gleichung (2):

$$\begin{aligned} dx_1 &= c\,dy - b\,dz + k\,dx \\ dy_1 &= a\,dz - c\,dx + k\,dy \\ dz_1 &= b\,dx - a\,dy + k\,dz. \end{aligned} \tag{4}$$

Kinematisch betrachtet, handelt es sich hier um die Angabe der Beziehungen zwischen den Bahnen zweier Punkte, welche mit derselben Geschwindigkeit sich bewegen und deren Bahntangenten sich unter stets gleichem Winkel kreuzen.

Nach Gl. (4) wird das System der Kurven C_1 durch die Integrale

$$\begin{aligned} x_1 &= \int \left(c\frac{dy}{ds} - b\frac{dz}{ds} + k\frac{dx}{ds} \right) ds \\ y_1 &= \int \left(a\frac{dz}{ds} - c\frac{dx}{ds} + k\frac{dy}{ds} \right) ds \\ z_1 &= \int \left(b\frac{dx}{ds} - a\frac{dy}{ds} + k\frac{dz}{ds} \right) ds \end{aligned} \tag{4a}$$

dargestellt.

Man ersieht hieraus, dass in die Bestimmung sämtlicher isometrischen Isogonalkurven von C drei willkürliche Funktionen einer Variablen eingehen.

Von einer solch grossen Mannigfaltigkeit von Kurven sind einfache gemeinsame Beziehungen nicht zu erwarten. Daher ist es unsere Aufgabe, a, b, c derart zu bestimmen, dass solche Relationen zwischen den isogonal-isometrischen Kurven C und C_1 sich ergeben.

§ 2.

Geometrische Deutung der Grundgleichungen — Lösungen.

Zu einer geeigneten Wahl von a, b, c leitet die Deutung des geometrischen Inhaltes der Gleichungen (4) in folgender Ueberlegung:

Wir betrachten zunächst eine Hilfskurve $\mathfrak{C}$, welche orthogonal und isometrisch zu der gegebenen Kurve C sein soll. Die rechtwinkeligen Koordinaten ihrer Punkte seien mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet, ihr Bogenelement $d\mathfrak{s}$ ist nach Vorstehendem gleich dem Bogenelement der Kurve $C = ds = ds_1$ (nach Gl. (3)).

Die Orthogonalität — ohne Berücksichtigung von Isometrie — der zwei Kurven $\mathfrak{C}$ und C ist nach Darboux[6]) und wie Gl. (1a) zu entnehmen ist, gegeben durch den Ansatz:

$$(5) \qquad d\mathfrak{x} \cdot dx + d\mathfrak{y} \cdot dy + d\mathfrak{z} \cdot dz = 0,$$

identisch mit dem Gleichungssystem:

$$(5a) \qquad \begin{aligned} d\mathfrak{x} &= \bar{c}\, dy - \bar{b}\, dz \\ d\mathfrak{y} &= \bar{a}\, dz - \bar{c}\, dx \\ d\mathfrak{z} &= \bar{b}\, dx - \bar{a}\, dy, \end{aligned}$$

wobei $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ wieder willkürliche Funktionen der Bogenlänge s sind.

Diese Gleichungen (5a) sind der analytische Ausdruck folgender geometrischen Beziehung:

Der Vektor $d\mathfrak{f}$ mit den Komponenten $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$ steht senkrecht zur Ebene ε, deren Stellung bestimmt ist durch 2 Vektoren: ds mit den Komponenten dx, dy, dz — und den Vektor mit den Komponenten $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Die zu bestimmende Kurve C_1 ist aber nicht orthogonal der Kurve C, sondern kreuzt diese in entsprechenden Punkten unter beliebigem konstanten Winkel ω. In diesem Falle allgemeiner Isogonalität ist für die Festlegung der Richtung ds_1 aus ds zu der Komponente in Richtung $d\mathfrak{f}$, welche orthogonal ds — und der Ebene ε — ist, noch eine proportionale (k Proportionalitätsfaktor) Komponente, parallel ds gerichtet, hinzuzunehmem, — wie sich aus (4) ergibt.

Zu der Bedingung der Isogonalität der Kurven C und C_1 tritt weiter noch die der Isometrie der beiden Kurven (untereinander und mit Hilfskurve $\mathfrak{C}$). Diese Voraussetzung verlangt die Berechnung der Grösse des Proportionalitätsfaktors (p), welcher das Mass der Fortschreitung auf der zu ds — und ε — orthogonalen Komponente $d\mathfrak{f}$ bestimmt.

Nach Gl. (4) gilt:

$$\begin{aligned} dx_1 - k\,dx &= c\,dy - b\,dz = p\,d\mathfrak{x} \\ dy_1 - k\,dy &= a\,dz - c\,dx = p\,d\mathfrak{y} \\ dz_1 - k\,dz &= b\,dx - a\,dy = p\,d\mathfrak{z}. \end{aligned}$$

Dividiert man diese Gleichungen je mit ds, quadriert, summiert und berücksichtigt, dass die Differentialquotienten von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ nach der Bogenlänge s ($\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$)[8]) zugleich die Richtungskosinus

[8]) Der Akzent bei der Funktionsbezeichnung bedeutet in Nachfolgendem stets die Differentiation nach der Bogenlänge s.

der Tangente von $\mathfrak{C}$ mit den positiven Koordinatenachsen bedeuten, so erhält man im Hinblick auf die Gleichungen:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$
$$x'_1{}^2 + y'_1{}^2 + z'_1{}^2 = 1$$
$$x'x'_1 + y'y'_1 + z'z'_1 = k$$

die Beziehung:

$$p = \pm\sqrt{1-k^2} = \pm\sqrt{1-\cos^2\omega} = \pm\sin\omega\,.$$

Demnach ergibt sich für die Darstellung der Kurven C_1 aus den Kurven C und $\mathfrak{C}$:

$$\begin{aligned} dx_1 &= k\,dx \pm \sqrt{1-k^2}\,d\mathfrak{x} = \cos\omega\cdot dx \pm \sin\omega\cdot d\mathfrak{x} \\ dy_1 &= k\,dy \pm \sqrt{1-k^2}\,d\mathfrak{y} = \cos\omega\cdot dy \pm \sin\omega\cdot d\mathfrak{y} \\ dz_1 &= k\,dz \pm \sqrt{1-k^2}\,d\mathfrak{z} = \cos\omega\cdot dz \pm \sin\omega\cdot d\mathfrak{z}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

wobei $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$ den Gleichungen (5a) zu entnehmen ist.

Damit hat man folgende geometrische Deutung der Gleichungen (4) und hierdurch die Konstruktion der zu C isogonal-isometrischen Kurve C_1:

Gegeben ist die Kurve C als Folge der Punkte P im Raume. Der Nachbarpunkt von P auf C, der Punkt P', wird durch Fortschreiten von P aus in der Richtung des Vektors ds um dessen Länge erhalten. — Dem Punkte P von C entspreche ein Punkt P_1 von C_1. Er kann beliebig im Raume gewählt werden. Dessen Nachbarpunkt P'_1 wird erhalten als Endpunkt der Resultante, welche durch vektorische Addition zweier Komponenten sich ergibt: einer Komponente k ds, d. i. eines Vektors parallel der Richtung ds, auf welchem fortgeschritten wird um einen Bruchteil von ds, gleich dem k (= cos ω) fachen, wo k der konstante Kreuzungswinkel der Kurven C und C_1 ist; — und einer Komponente orthogonal der Richtung ds (sowie der durch ds und $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ bestimmten Ebene ε), auf welcher das Mass der Fortschreitung durch das $\sqrt{1-k^2}$ fache von ds, also den Sinus jenes Neigungswinkels ω, gegeben ist. — Es erscheint demnach der Vektor ds_1, dessen Länge gleich ist ds, als Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Kathete parallel, dessen andere Kathete senkrecht zur Richtung ds steht. Dabei beträgt der Winkel der Hypotenuse mit der zur Richtung ds parallelen Kathete den konstanten Kreuzungswinkel ω.

Von der Wahl der Grössen $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, d. i. der Richtung, welche gemeinsam mit der Tangente von C (dx, dy, dz) die Lage der Ebene ε und deren Senkrechte $d\mathfrak{f}$, die Tangente von

$\mathfrak{C}$, bestimmt, hängt nach Gl. (6) und (5a) die Art der Kurven C_1 und deren geometrische Beziehung zu C ab.

Es ergeben sich folgende Möglichkeiten der Lösung:

Der Vektor mit den Komponenten $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ habe die Richtung: 1. einer beliebigen doch festen Geraden, d. h. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sind konstant; 2. einer zur Tangente von C, ds, senkrechten beweglichen Geraden und zwar: entweder

a) die Richtung der Hauptnormalen der Kurve C, d. h. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sind bez. gleich: $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$;

b) oder die Richtung der Binormalen von C, d. h. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sind bez. gleich: $\cos\varphi$, $\cos\chi$, $\cos\psi$.

a, b, c (Gl. 4) sind demnach proportional ($p, = \pm \sin\omega$, Proportionalitätsfaktor) den angegebenen Richtungskosinus zu setzen.

Ihre Werte bestimmen sich folgendermassen:

Für Lösung 1:

$$\begin{aligned} a &= \pm \sin\omega \cdot \bar{a} \\ b &= \pm \sin\omega \cdot \bar{b} \\ c &= \pm \sin\omega \cdot \bar{c}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Für Lösung 2a:

$$\begin{aligned} a &= \pm \sin\omega \cdot \cos\lambda \\ b &= \pm \sin\omega \cdot \cos\mu \\ c &= \pm \sin\omega \cdot \cos\nu\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Für Lösung 2b:

$$\begin{aligned} a &= \pm \sin\omega \cdot \cos\varphi \\ b &= \pm \sin\omega \cdot \cos\chi \\ c &= \pm \sin\omega \cdot \cos\psi\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Wie sich aus Gl. (6) ergibt, wird im Falle der Orthogonalität der Kurven C und C_1 die Kurve C_1 kongruent der isometrischen Kurve $\mathfrak{C}$, deren Richtung jeweils durch die Normale zur Ebene ε bestimmt ist. (Vgl. auch Anm. [9]).

§ 3.

Zusammenhang mit den unendlich kleinen Verbiegungen von Raumkurven.

Zu der Gleichung (1) gelangt man auch durch Betrachtung der unendlich kleinen Verbiegung der Raumkurve C.

---

[9]) Im Falle der Orthogonalität ($\cos\omega = 0$, $\sin\omega = 1$), wird $p = \pm 1$, die Kurve C_1 kongruent der Kurve $\mathfrak{C}$.

Der Ansatz von Darboux (Gl. 5) schliesst Isometrie nicht aus, bedingt sie aber nicht.

Der Punkt P (x, y, z) der Kurve C erleidet bei der unendlich kleinen Deformation eine Verschiebung, deren Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen gegeben sind durch:

$$\varepsilon x_1, \quad \varepsilon y_1, \quad \varepsilon z_1;$$

x_1, y_1, z_1 seien Funktionen des Parameters s, ε bezeichne eine unendlich kleine Konstante.

Nach Vornahme der unendlich kleinen Verbiegung der Kurve C befindet sich Punkt P in Punkt P_0, der die Koordinaten besitzt:

$$\begin{aligned} x_0 &= x + \varepsilon x_1 \\ y_0 &= y + \varepsilon y_1 \\ z_0 &= z + \varepsilon z_1; \end{aligned}$$

mit diesen letzteren Gleichungen ist die Parameterdarstellung der Kurve C_0, die durch die unendlich kleine Deformation aus der Kurve C hervorging, gegeben.

Nach Voraussetzung — die Kurve C ist nicht dehnbar — muss das Bogenelement von C gleich dem Bogenelement von C_0 sein, also:

$$ds^2 = ds_0^2,$$

d. h.

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\varepsilon(dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1) \\ &\quad + \varepsilon^2(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2). \end{aligned}$$

Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Wir betrachten ε als eine unendlich kleine Konstante, deren Potenzen von der 2. Ordnung an vernachlässigt werden können; dann ergibt sich:

$$(1') \qquad dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0.$$

2. Wir ziehen auch noch die 2. Potenzen von ε in Betracht; dann erhalten wir die Gleichung:

$$(1b) \quad 2(dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1) + \varepsilon(dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2) = 0.$$

Die Lösung unserer Aufgabe verlangt also die Bestimmung der Funktionen x_1, y_1, z_1, welche den Gleichungen (1') und (1b) genügen, oder, mit anderen Worten:

Die vollständige Integration dieser Gleichungen gibt die Lösung dessen, was wir das Problem der unendlich kleinen Verbiegung der Raumkurve C nennen. Nach dem Vorbilde von Moutard[10]) interpretieren wir die Gleichungen (1') und

[10]) Moutard, Sur la déformation des surfaces (Bulletin de la Société Philomathique, 1869, S. 45, Sitzung vom 12. Juni. Ferner Moutard, Mémoire et Note, Comptes rendus, Bd. LXX, S. 834.

(1b) geometrisch, indem wir ihnen folgende Deutung geben:

Wir betrachten x_1, y_1, z_1 als Koordinaten eines Raumpunktes P_1; während P die Raumkurve C beschreibt, erzeugt P_1 eine Kurve C_1, welche Punkt für Punkt der Kurve C entspricht.

Wir dividieren Gleichung (1') durch $ds \cdot ds_1$ und erhalten:

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dy_1}{ds_1} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz_1}{ds_1} = 0.$$

Definieren wir nun:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha\,, \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta\,, \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma\,,$$

wobei α, β, γ die Winkel sind, welche die + Tangente der Kurve C mit den + Koordinatenachsen bildet; setzen wir ferner fest:

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \cos\alpha_1\,, \quad \frac{dy_1}{ds_1} = \cos\beta_1\,, \quad \frac{dz_1}{ds_1} = \cos\gamma_1\,,$$

wobei α_1, β_1, γ_1 die Winkel der + Tangente von C_1 mit den + Koordinatenachsen bezeichnen, so erhalten wir:

(1c) $$\cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 = 0$$

und damit folgende geometrische Deutung:

Die korrespondierenden Bogenelemente der beiden Kurven C und C_1 sind immer orthogonal.

Entsprechend ergibt sich aus Gleichung (1b) durch Division mit $ds \cdot ds_1$:

$$2\left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dy_1}{ds_1} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz_1}{ds_1}\right) + \varepsilon\left(\frac{dx_1^2}{ds\,ds_1} + \frac{dy_1^2}{ds\,ds_1} + \frac{dz_1^2}{ds\,ds_1}\right) = 0;$$

Da wir zufolge unseren Voraussetzungen weiter erhalten:

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = ds_1^2\,,$$

so folgt nach einiger Umformung:

(1d) $$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dx_1}{ds_1} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{dy_1}{ds_1} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{dz_1}{ds_1} = -\frac{\varepsilon}{2}\frac{ds_1}{ds}$$

oder:

$$\cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 = -\frac{\varepsilon}{2}\frac{ds_1}{ds}\,,$$

d. h. der Kosinus des Winkels, welchen entsprechende Bogenelemente der Kurven C und C_1 bilden, ist proportional dem Verhältnis der korrespondierenden Bogenlängen.

Wir setzen nun weiter voraus, dass

$$\frac{ds_1}{ds} = 1$$

sei, d. h. es sei die Kurve C_1 isometrisch mit der Kurve C.

Diese Annahme ändert die Form der Gleichung (1') und deren geometrischen Inhalt überhaupt nicht.

Aus (1d) erhalten wir durch diese Festsetzung:

$$(1) \quad \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 = -\frac{\varepsilon}{2} = k = \cos\omega$$

und damit folgende geometrische Deutung:

In korrespondierenden Punkten sind die isometrischen Kurven C und C_1 isogonal.

Umgekehrt gilt ferner: Ist C_1 eine Kurve, die durch Konstanz 1) des rechten Winkels, 2) des beliebigen Winkels, welchen korrespondierende Bogenelemente bilden, der Kurve C punktweise entspricht und ist C_1 zugleich isometrisch mit C, so charakterisiert die Kurve C_1 eine unendlich kleine Verbiegung der Kurve C.

Das Problem der unendlich kleinen Verbiegung von Raumkurven hängt also enge zusammen mit der Frage nach orthogonalen Kurvenpaaren und erfordert Betrachtungen über die Isogonalität eines Paares isometrischer Kurven doppelter Krümmung. Man kann demnach der Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegungen einer Kurve C folgende Fassung geben: Zu bestimmen ist die Kurve C_1, welche mit der Kurve C isometrisch ist und dieser durch Winkelkonstanz korrespondierender Bogenelemente entspricht; oder: Die Lösung des Problems der unendlich kleinen Deformation von Kurve C führt zur Bestimmung von Kurven C_1, welche Punkt für Punkt der mit C_1 isometrischen Kurve C derart entsprechen, dass die korrespondierenden Bogenelemente einen konstanten Winkel bilden.

Wenn man also das Problem der isometrischen Isogonaltrajektorien für eine Raumkurve C zu lösen weiss, kann man Kurven C_0 bestimmen, in welche durch unendlich kleine Verbiegung die Kurve C überführbar ist.

§ 4.

Beziehungen zwischen isogonal-isometrischen Kurven-Gegenseitigkeit derselben.

1) Zunächst soll die Frage erörtert werden, ob die durch die Gleichung:

$$(4b) \quad dx_1 \cdot dx + dy_1 \cdot dy + dz_1 \cdot dz = k\,ds^2 = k\,ds_1^2,$$

bezw. das sie ersetzende System der Gleichungen (4) ausgedrückte Beziehung zwischen den Kurven C und C_1 bei den für a, b, c gewählten Werten (Gl. 7—9) umkehrbar ist.

Betrachtet man das System der Gleichungen (4) als Gleichungen für die Berechnung der Werte der drei Unbekannten dx, dy, dz und bezeichnet man mit Δ die Determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & c & -b \\ -c & k & a \\ b & -a & k \end{vmatrix} = k(k^2 + a^2 + b^2 + c^2),$$

welcher Wert sich durch Berücksichtigung der Relation:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \sin^2\omega(\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2) = 1 - k^2$$

vereinfacht zu:

$$\Delta = k,$$

so ergibt sich:

$$dx = \frac{1}{k}\left[dx_1(k^2 + a^2) - dy_1(kc - ab) + dz_1(kb + ac)\right]$$

(4c) $$dy = \frac{1}{k}\left[dx_1(kc + ab) + dy_1(k^2 + b^2) - dz_1(ka - bc)\right]$$

$$dz = \frac{1}{k}\left[dx_1(-kb + ac) + dy_1(ka + bc) + dz_1(k^2 + c^2)\right].$$

Da aber zufolge Gl. (4b) die Grössen dx, dy, dz; dx_1, dy_1, dz_1 und k von einander abhängig sind, also gelten muss:

(4d) $$k^2 ds_1^2 + (a\,dx_1 + b\,dy_1 + c\,dz_1)^2 = k^2 ds^2 = k^2 ds_1^2,$$

wie durch Multiplikation der Gln. in (4c) mit dx_1 bezw. dy_1, dz_1 folgt, so ergibt sich: Die Umkehrbarkeit der Beziehung (4) ist abhängig von der Erfüllung der Gleichung:

(4e) $$a\,dx_1 + b\,dy_1 + c\,dz_1 = 0.$$

Ferner folgt aus (4) in Verbindung mit Gl. (4e):

$$a\,dx_1 + b\,dy_1 + c\,dz_1 = k(a\,dx + b\,dy + c\,dz) = 0$$

d. h.

$$\pm\cos\omega\sin\omega(\bar{a}\,dx + \bar{b}\,dy + \bar{c}\,dz) = 0$$

oder:

$$\frac{1}{2}\sin 2\omega = 0\ ^{11})$$

d. h.

$$2\omega = n\pi$$

$$\omega = \frac{n\pi}{2} \qquad (n = 0,\ 1, 2, 3 \cdots).$$

Ist n eine gerade Zahl, so ergibt sich hieraus für den Wert Δ der Determinante:

$$k = \cos\omega = \pm 1,$$

d. h. die Tangenten der Kurven C und C_1 sind gleich- oder ungleichsinnig parallel.

Ist n eine ungerade Zahl, so folgt:

$$k = 0,$$

d. h. die Kurve C_1 ist identisch mit der Kurve $\mathfrak{C}$, deren Tangentenrichtung normal zu der durch die Richtung der Tangenten von C (dx, dy, dz) und $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ bestimmten Ebene ist.

Die Gegenseitigkeit der Beziehungen (4) zwischen den isogonal-isometrischen Kurven C und C_1, für welche a, b, c durch die in Gl. (7—9) bezeichneten Werte gegeben sind, hängt ab von der Erfüllung der Be-

---

11) Die Erfüllung der Bedingung (4e) ist nur abhängig von der Grösse des Winkels ω; das Nullsetzen des Klammerausdruckes: $\bar{a}\,dx + \bar{b}\,dy + \bar{c}\,dz$ ist: für Lösung 1 nicht zulässig; denn nach (7) sind $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ willkürliche Konstante, nur durch die Relation verknüpt: $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 = 1$, für Lösung 2a und 2b identisch mit der Bedingung: $k = 0$.

Aus (4e) folgt nämlich: $\sin\omega\,(\bar{a}\,dx_1 + \bar{b}\,dy_1 + \bar{c}\,dz_1) = \sin\omega\cos\omega\,(\bar{a}dx + \bar{b}dy + \bar{c}dz) = 0$ oder: $\sin\omega\,[\cos\omega\,(\bar{a}dx + \bar{b}dy + \bar{c}\,dz) - (\bar{a}\,dx_1 + \bar{b}\,dy_1 + \bar{c}\,dz_1)] = 0$; dies tritt ein für:

1) $\sin\omega = 0$; $\omega = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \cdots \cdots n\pi$

2) $\cos\omega\,(\bar{a}dx + \bar{b}dy + \bar{c}dz) - (\bar{a}dx_1 + \bar{b}dy_1 + \bar{c}\,dz_1) = 0$,

woraus wegen der Orthogonalität der Richtung $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ und dx, dy, dz folgt: $\bar{a}\,dx_1 + \bar{b}\,dy_1 + \bar{c}\,dz_1 = 0$.

Diese Bedingung ist durch Gl. (8) und (9) nicht allgemein erfüllt, sondern muss als Voraussetzung für die Umkehrbarkeit der Relationen (4) eigens aufgestellt werden. Sie ist identisch mit der Festsetzung: $\cos\omega = k = 0$; $\omega = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \cdots \frac{(2n+1)\pi}{2}$; denn ist die Richtung $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ orthogonal zu der von ds und ds_1, so folgt, dass ds und ds_1 selbst senkrecht aufeinander stehen. Vergl. auch S. 131.

dingung: der konstante Kreuzungswinkel ω muss ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ sein.

2. Wir gehen nun über zur Einzelbetrachtung der durch Gl. (7—9) bezeichneten Lösungen[12]) und setzen: 1°. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sind konstant, d. h. der Vektor mit den Komponenten $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ist parallel einer Geraden, deren Richtungskosinus durch $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ gegeben sind.

Die Ebenen ε, welche je durch diese konstante Richtung und die der Tangente ds von C bestimmt werden, können als zugehörig einem Ebenenbüschel betrachtet werden, dessen Achse die Gerade mit den Richtungskosinus $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ist. Die Kurven C_1 sind Isogonal-Trajektorien dieses Ebenenbüschels und gegeben durch die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= kx \pm \sqrt{1-k^2}\,(\bar{c}\,y - \bar{b}\,z) + A \\
y_1 &= ky \pm \sqrt{1-k^2}\,(\bar{a}\,z - \bar{c}\,x) + B \\
z_1 &= kz \pm \sqrt{1-k^2}\,(\bar{b}\,x - \bar{a}\,y) + C\,.
\end{aligned}
\tag{7a}
$$

Man erhält also, entsprechend den drei Integrationskonstanten A, B, C, ∞^3 kongruente Kurven, durch jeden Punkt des Raumes eine, welche isogonal-isometrisch zu C sind. — Sie liegen auf abwickelbaren Flächen, deren Art durch die Kurve C, d. i. jene Kurve, deren Tangenten mit den Erzeugenden der Fläche konstante Winkel bilden, bestimmt ist, und welche nur dann Ebenen sind, wenn $k = 0$ gesetzt wird. In letzterem Falle erfüllen die zu C orthogonal isometrischen Kurven C_1 in ihrer

[12]) Lancret führt in seinem Artikel: Mémoire sur les développoïdes des courbes planes... (Mémoires des savans étrangers, Paris 1811, II. Bd. S. 1 ff.) die „développoïdes" als Kurven ein, welche entstehen als umhüllt von jenen Geraden, die durch die Punkte einer gegebenen Kurve gezogen sind und deren Tangenten in diesen Punkten unter konstantem Winkel schneiden. Diese „développoïdes" sind offenbar identisch mit den von Schell-Salkowski (a. a. O. S. 172) unter Berufung auf Molins: Sur les trajectoires qui coupent, sous un angle donné, les tangentes à une courbe à double courbure, Journ. d. Math. Paris, Bd. VIII. S. 132 ff. Ferner Molins: Note sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable ... Journ. d. Math. Bd. 12, S. 394 ff. erwähnten Evolventoïden. Von den C_1 Kurven nach § 4. 2, 1° und 2°a) und b) unterscheiden sich diese vorgenannten Kurven wesentlich dadurch, dass sie die gegebene Kurve C tatsächlich schneiden und auf deren Tangentenfläche liegen, was für die C_1 Kurven von 4 nicht vorausgesetzt ist; ferner ist die Bogenlänge der Evolventoïden aus den gemachten Annahmen erst zu errechnen, während sie für die Kurven C_1 nach 4 als gleich mit dem Bogenelement ds der Kurve C gegeben ist. (Gl. 3). Die Evolventoïden ebenso die aus der Umkehrung des Problems sich ergebenden Evolutoïden (Schell-Salkowski a. a. O. S. 161 ff.) sind demnach nur für bestimmte Raumkurven isogonal-isometrische Kurven C_1 nach 4.

Gesamtheit ein Büschel unter sich paralleler, zur Geraden $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ orthogonalen Ebenen, was aus (6) und (7a) folgt:

$$\text{(7b)} \qquad \bar{a}\,x_1 + \bar{b}\,y_1 + \bar{c}\,z_1 = \bar{a}\,A + \bar{b}\,B + \bar{c}\,C = \text{konstant.}$$

Da die Beziehungslosigkeit der beliebigen Geraden $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ zur Kurve C keine geometrisch interessierenden Relationen zwischen den Kurven C und C_1 zulässt, gehen wir über zur Untersuchung der beiden anderen Lösungsmöglichkeiten.

2⁰. Wir setzen $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ gleich den Richtungskosinus einer zur Tangente von C jeweils senkrechten Geraden und zwar:

a) der Hauptnormalen der Kurve C, d. h.:

$$\text{(8)} \qquad \begin{aligned} \bar{a} &= r\,x'' \quad \text{oder:} \quad a = \pm r\,x'' \cdot \sin\omega \\ \bar{b} &= r\,y'' \qquad\qquad b = \pm r\,y'' \cdot \sin\omega \\ \bar{c} &= r\,z'' \qquad\qquad c = \pm r\,z'' \cdot \sin\omega\,. \end{aligned}$$

Die Ebene ε, sonach bestimmt durch Richtung von Tangente und Hauptnormale der Kurve C, ist jeweils parallel der Schmiegungsebene von C; die Tangente der Kurve $\mathfrak{C}$ ist also parallel der Binormalen der Kurve C, d. h.:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{ds} &= \cos\varphi = r\,(y'\,z'' - z'\,y'') \\ \frac{d\eta}{ds} &= \cos\chi = r\,(z'\,x'' - x'\,z'') \\ \frac{d\zeta}{ds} &= \cos\psi = r\,(x'\,y'' - y'\,x'')\,. \end{aligned}$$

Die Kurven C_1 sind Isogonaltrajektorien der Schmiegungsebenen von C und nach Gl. (6) gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx_1 &= k\,dx \pm \sqrt{1-k^2}\cos\varphi\,ds \\ dy_1 &= k\,dy \pm \sqrt{1-k^2}\cos\chi\,ds \\ dz_1 &= k\,dz \pm \sqrt{1-k^2}\cos\psi\,ds\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten sonach:

$$\text{(8a)} \qquad \begin{aligned} \cos\alpha_1 = x_1' &= k\cos\alpha \pm \sqrt{1-k^2}\cos\varphi = \cos\omega\cos\alpha \pm \sin\omega\cos\varphi \\ \cos\beta_1 = y_1' &= k\cos\beta \pm \sqrt{1-k^2}\cos\chi = \cos\omega\cos\beta \pm \sin\omega\cos\chi \\ \cos\gamma_1 = z_1' &= k\cos\gamma \pm \sqrt{1-k^2}\cos\psi = \cos\omega\cos\gamma \pm \sin\omega\cos\psi \end{aligned}$$

und hieraus:

$$x_1 = \int\left(kx' \pm \sqrt{1-k^2}\,\frac{y'z''-z'y''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\right)ds + A$$

(8b)
$$y_1 = \int\left(ky' \pm \sqrt{1-k^2}\,\frac{z'x''-x'z''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\right)ds + B$$

$$z_1 = \int\left(kz' \pm \sqrt{1-k^2}\,\frac{x'y''-y'x''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\right)ds + C.$$

Es ergibt sich für jedes k eine Schar von ∞^3 kongruenten Kurven im Raume. Darunter sind einzelne Scharen von Kurven ausgezeichnet, insbesondere die Schar der Kurven, die sich für $\omega = 90^0$ ergeben. Für $\omega = 0$ reduziert sich die Schar auf die Kurve C und die ihr kongruenten Kurven.

Aus der vorstehenden Lösung der Gleichungen und nach den Serret-Frenet'schen Formeln ergeben sich als Folgerungen für die Beziehungen zwischen den Kurven C und C_1, namentlich deren charakteristischen Triëdern:

$$\cos\lambda_1 = r_1\frac{d\cos\alpha_1}{ds} = r_1\frac{d(\cos\omega\cos\alpha \pm \sin\omega\cos\varphi)}{ds}$$
$$= r_1\cos\lambda\left(\frac{\cos\omega}{r} \pm \frac{\sin\omega}{\varrho}\right)$$

(10)
$$\cos\mu_1 = r_1\frac{d\cos\beta_1}{ds} = r_1\frac{d(\cos\omega\cos\beta \pm \sin\omega\cos\chi)}{ds}$$
$$= r_1\cos\mu\left(\frac{\cos\omega}{r} \pm \frac{\sin\omega}{\varrho}\right)$$

$$\cos\nu_1 = r_1\frac{d\cos\gamma_1}{ds} = r_1\frac{d(\cos\omega\cos\gamma \pm \sin\omega\cos\psi)}{ds}$$
$$= r_1\cos\nu\left(\frac{\cos\omega}{r} \pm \frac{\sin\omega}{\varrho}\right).$$

Da

$$\cos^2\lambda_1 + \cos^2\mu_1 + \cos^2\nu_1 = 1$$

sein muss, so erhält man aus (10) durch Quadrieren und Summation

$$1 = r_1^2\left(\frac{\cos\omega}{r} \pm \frac{\sin\omega}{\varrho}\right)^2,$$

demnach für den Krümmungsradius der Kurve C_1:

(11)
$$r_1 = \left|\frac{r\varrho}{\pm\sqrt{1-k^2}\,r + k\varrho}\right|$$

oder:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\cos\omega}{r} \pm \frac{\sin\omega}{\varrho}.$$

Diese lineare Relation zwischen der Krümmung einer Raumkurve C_1 und der Krümmung und Schmiegung der ihr isogonal-isometrischen Kurve C entspricht vollkommen der Beziehung für ein Paar Bertrandscher Kurven, wenn man setzt:

$$r_1 = \text{konstant},$$

d. h. für die isogonal-isometrischen Kurven C der Kurven C_1 konstanter Krümmung gibt es in konstantem Abstand $(r_1 \cdot \cos\omega)$ auf der Fläche ihrer Hauptnormalen eine zweite Kurve C_0, welche mit C gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen besitzt und deren Tangenten gegen die Tangenten der Kurve C unter einem Kreuzungswinkel ω geneigt sind, für welchen $\operatorname{tg}\bar{\omega} = \pm \operatorname{ctg}\omega$.

Setzt man die Werte von r_1 in die Gleichungen (10) ein, so folgt für die Richtungskosinus der Hauptnormalen von C_1:

$$\begin{aligned} \cos\lambda_1 &= \cos\lambda \\ \cos\mu_1 &= \cos\mu \\ \cos\nu_1 &= \cos\nu, \end{aligned} \tag{10a}$$

d. h. die Hauptnormalen von C und C_1, also auch die rektifizierenden Ebenen und Flächen beider Kurven sind einander parallel.

Berechnet man die Richtungskosinus der Binormalen von C_1 nach der Formel:

$$\cos\varphi_1 = r_1 (y_1' z_1'' - z_1' y_1'') \quad \text{u. s. f.},$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= k\cos\varphi \mp \sqrt{1-k^2}\cos\alpha &&= \cos\omega\cos\varphi \mp \sin\omega\cos\alpha \\ \cos\chi_1 &= k\cos\chi \mp \sqrt{1-k^2}\cos\beta &&= \cos\omega\cos\chi \mp \sin\omega\cos\beta \\ \cos\psi_1 &= k\cos\psi \mp \sqrt{1-k^2}\cos\gamma &&= \cos\omega\cos\psi \mp \sin\omega\cos\gamma. \end{aligned} \tag{12}$$

Die Rechnung ergibt weiter, dass die Binormalen von C und C_1 konstant denselben Winkel bilden, unter dem die Tangenten von C und C_1 geneigt sind, d. h. den Winkel ω, dessen Kosinus $= k$ [13]).

Es folgt ferner:

die Tangente von C und die Hauptnormale von C_1,
die Hauptnormale von C und die Tangente von C_1,
die Hauptnormale von C und die Binormale von C_1,

---

[13]) Die Folgerung dieser Beziehungen erscheint als eine Bestätigung des Satzes von Aoust (Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Paris 1876, S. 369):

Sind 2 Kurven so aufeinander bezogen, dass sie in entsprechenden Punkten parallele Hauptnormalen haben, so ist der Winkel ihrer Tangenten sowie auch ihrer Binormalen konstant. Vgl. A. Voss, a. a. O. S. 48 ff.

desgleichen die Binormale von C und die Hauptnormale von C_1 stehen aufeinander senkrecht.

Die Tangente von C und die Binormale von C_1 kreuzen sich unter einem Winkel, dessen Kosinus konstant $= \mp \sqrt{1-k^2} = \mp \sin\omega$, die Binormale von C und die Tangente von C_1 bilden einen Winkel, dessen Kosinus ebenfalls konstant, doch $\pm \sqrt{1-k^2} = \pm \sin\omega$, d. h. diese beiden Winkel ergänzen sich zu 180^0.

Für den Torsionsradius von C_1 liefert die Rechnung:

$$\varrho_1 = \frac{\cos\lambda_1}{\frac{d\cos\varphi_1}{ds}} = \frac{r\varrho}{kr \mp \sqrt{1-k^2}\cdot\varrho}$$

oder:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{\cos\omega}{\varrho} + \frac{\sin\omega}{r}. \tag{13}$$

Auch für die isogonal-isometrischen Kurven C von Kurven C_1 konstanter Torsion gibt es demnach auf der Fläche ihrer Hauptnormalen in konstantem Abstand ($l_1 = \mp \varrho_1 \sin\omega$) eine Kurve C_0, welche mit C dieselbe Fläche der Hauptnormalen gemeinschaftlich hat und deren Tangenten diejenigen der Kurve C unter einem Winkel $\bar{\omega}$ kreuzen, für welchen gilt: $\operatorname{tg}\bar{\omega} = \mp \operatorname{tg}\omega$, d. h. Kurven C und C_0 bilden ein Bertrandsches Paar, wenn die isogonal-isometrische Kurve C_1 einer dieser Kurven eine Kurve konstanter Torsion ist.

Für das Verhältnis von Kontingenz- und Torsionswinkel, mithin das Verhältnis von Krümmung und Windung von C_1 erhält man:

$$\frac{d\tau_1}{d\vartheta_1} = \frac{\varrho\cos\omega \pm r\sin\omega}{r\cos\omega \mp \varrho\sin\omega}.$$

Für den Radius der ganzen Krümmung von C_1 folgt:

$$\frac{1}{r_1^2} = \left(\frac{dt_1}{ds}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}, \tag{14}$$

d. h. der Radius der ganzen Krümmung, damit auch das Mass der ganzen Krümmung und der Winkel derselben sind für die Kurven C und C_1 gleich, also die Ebenen und Flächen der ganzen Krümmung[14]) für die Kurven C und C_1 einander parallel.

---

[14]) Schell-Salkowski, a. a. O. S. 30.

Für die Richtungskosinus der rektifizierenden Geraden von C_1 ergibt sich:

$$\cos\mathfrak{a}_1 = \frac{\varrho_1 \cos\varphi_1 - r_1 \cos\alpha_1}{\sqrt{r_1^2 + \varrho_1^2}} = \cos\mathfrak{a}$$

$$\cos\mathfrak{b}_1 = \frac{\varrho_1 \cos\chi_1 - r_1 \cos\beta_1}{\sqrt{r_1^2 + \varrho_1^2}} = \cos\mathfrak{b} \tag{15}$$

$$\cos\mathfrak{c}_1 = \frac{\varrho_1 \cos\psi_1 - r_1 \cos\gamma_1}{\sqrt{r_1^2 + \varrho_1^2}} = \cos\mathfrak{c},$$

d. h. die rektifizierenden Geraden und die Gratlinien der rektifizierenden Flächen der Kurven C und C_1 sind einander parallel.

Es folgt weiter, da, wie die Ausrechnung ergibt, die Beziehung besteht:

$$\cos(H - H_1) = k = \cos\omega,$$

dass die Winkel, welche die rektifizierenden Geraden von C und C_1 mit den Tangenten dieser Kurven bilden, sich um den Winkel ω unterscheiden.

Der Radius der Schmiegungskugel von C_1 berechnet sich zu:

$$\mathfrak{R}_1^2 = -\frac{r^2\varrho^2}{(k\varrho \pm \sqrt{1-k^2}\cdot r)^2}\left[1 + \left(\frac{k\varrho^2\frac{dr}{ds} \pm \sqrt{1-k^2}\,r^2\frac{d\varrho}{ds}}{(kr \mp \sqrt{1-k^2}\varrho)(k\varrho \pm \sqrt{1-k^2}\cdot r)}\right)^2\right]$$

oder:

$$\mathfrak{R}_1^2 = \frac{r^2\varrho^2}{(\varrho\cos\omega \pm r\sin\omega)^2}\left[1 + \left(\frac{\varrho^2\frac{dr}{ds}\cos\omega \pm r^2\frac{d\varrho}{ds}\sin\omega}{(r\cos\omega \mp \varrho\sin\omega)(\varrho\cos\omega \pm r\sin\omega)}\right)^2\right]. \tag{16}$$

Beispiele: a) Ist die Kurve C eben, also $\varrho = \infty$, aber r nicht konstant, so wird $r_1 = \frac{r}{k} = \frac{r}{\cos\omega}$, $\varrho_1 = \mp\frac{r}{\sqrt{1-k^2}} = \mp\frac{r}{\sin\omega}$, sonach $\frac{\varrho_1}{r_1}$ konstant $= \mp\operatorname{ctg}\omega$, d. h. die Kurve C_1 ist eine allgemeine Schraubenlinie auf einem Zylinder, dessen Achse senkrecht der Ebene der Kurve C und dessen Leitkurve ähnlich jener Kurve C ist, ($x_1 = kx$; $y_1 = ky$).

Ist die Kurve C ein Kreis, also r konstant $= k$, so wird r_1 konstant $= k_1$, ϱ_1 konstant $= k_2$, also die Kurve C_1 eine Schraubenlinie auf einem zur Kreisebene senkrechten Rotationszylinder mit dem Grundkreisradius k r.

Ist C eine Gerade, also $r = \infty$, so folgt, dass $r_1 = \varrho_1 = \infty$, die Kurve C_1 sonach wieder eine Gerade ist, geneigt unter dem Winkel ω zur Geraden C.

b) Ist $\frac{\varrho}{r}$ konstant $= \varkappa$, also die Kurve C eine allgemeine Schraubenlinie, so wird $r = \frac{\varkappa \cdot r}{\varkappa \cdot k \pm \sqrt{1-k^2}} = \frac{\varkappa \cdot r}{\varkappa \cdot \cos\omega \pm \sin\omega}$, d. h. proportional r, $\varrho_1 = \frac{\varkappa \cdot r}{k \mp \sqrt{1-k^2} \cdot \varkappa} = \frac{\varkappa \cdot r}{\cos\omega \mp \varkappa \sin\omega}$, d. h. proportional r, sonach der Quotient $\frac{\varrho_1}{r_1}$ konstant, d. h. die Kurve C_1 ist gleichfalls allgemeine Schraubenlinie auf einem Zylinder, dessen Achse parallel der des Zylinders ist, auf welchem die Kurve C Geodätische ist.

Ist ϱ konstant $= \varkappa_1$, r konstant $= \varkappa_2$, also C eine gewöhnliche Schraubenlinie, so werden ϱ_1 und r_1 konstant, d. h. die Kurve C ist wieder eine Schraubenlinie auf einem Rotationszylinder mit dem Grundkreisradius $(\cos\omega \pm \varkappa \sin\omega)\, r \cdot -\left(\varkappa = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\right)$.

Haben die isogonal-isometrischen Kurven C und C_1 in entsprechenden Punkten gleiche Krümmungsradien, so ist nach (10) die Bedingung erfüllt:

$$r_1 = r = \frac{r\,\varrho}{k\,\varrho \pm \sqrt{1-k^2}\, r}.$$

Dies tritt ein, wenn

$$\frac{\varrho}{r} = \mp \frac{\sqrt{1-k^2}}{k-1} = \text{konstant};$$

in diesem Falle wird $\varrho_1 = -\varrho$ und es ergibt sich sonach: Für allgemeine Schraubenlinien, welche isogonal-isometrisch sind und gleiche Krümmung besitzen, ist die Torsion gleichgross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen; sie sind also in entsprechenden Punkten symmetrisch.

Für die orthogonal-isometrischen Kurven von C nach 2^0. a) vereinfachen sich die Formeln (8), (10)—(16) wesentlich, indem dort $k = \cos\omega = 0$, $\sin\omega = 1$ zu setzen ist, die Kurve C identisch mit der Kurve $\mathfrak{C}$ (Gl. 5a) wird.

In diesem Falle führt zur Lösung der Gl. (4) die Festsetzung:

Die Tangente der Kurve C_1 ist parallel (gleich oder entgegengesetzt gerichtet) der Binormalen der Kurve C, d. h.

$$\text{(8a')} \qquad \begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \pm \cos\varphi \\ \cos\beta_1 &= \pm \cos\chi \\ \cos\gamma_1 &= \pm \cos\psi, \end{aligned}$$

d. h. die Kurventangenten von C_1 schneiden

die Schmiegungsebenen von C sämtlich unter rechten Winkeln[15]).

Im Einzelnen ergeben sich für $\omega = 90^0$ folgende bemerkenswerte Relationen zwischen den Kurven C und C_1:

Aus (11) folgt:

(11a) $$r_1 = |\varrho|$$ [16])

d. h. der Krümmungsradius der Kurve C_1 ist der absoluten Grösse nach gleich dem Torsionsradius der Kurve C, oder, anders ausgedrückt:

$$d\tau_1 = |d\vartheta|$$

d. h. der Kontingenzwinkel der Kurve C_1 ist gleich dem Schmiegungswinkel der Kurve C. Aus (12) ergibt sich:

(12a)
$$\cos\varphi_1 = \mp\cos\alpha$$
$$\cos\chi_1 = \mp\cos\beta$$
$$\cos\psi_1 = \mp\cos\gamma,$$

d. h. die Binormalen von C_1 sind parallel und entgegengesetzt gerichtet den Tangenten von C; die Bogenelemente von C schneiden die Schmiegungsebenen von C_1 rechtwinkelig.

Man erhält demnach:

Die Schmiegungsebenen der Kurve C sind parallel den Normalebenen der Kurve C_1. (Dabei ist abgesehen von der geometrischen Unterscheidung der positiven oder negativen Windung); — die oskulierende Fläche von C (Enveloppe der Schmiegungsebenen) ist parallel der Achsen- oder Polarfläche (Enveloppe der Normalebenen) von C_1.

Die Normalebenen der Kurve C sind parallel den Schmiegungsebenen der Kurve C_1. — Die Achsenfläche von C ist parallel der Tangentenfläche von C_1.

---

[15]) Obwohl die Tangenten der Kurve C_1 parallel den Binormalen der Kurve C in entsprechenden Punkten sind, ist die abwickelbare Fläche der Tangenten von C in korrespondierenden Punkten nicht parallel der Fläche der Binormalen von C; denn letztere ist für alle nicht ebenen Kurven eine windschiefe Regelfläche, da sich die Binormalen einer solchen Kurve nicht schneiden. Ferner können daher die Erzeugenden dieser Fläche, die Binormalen von C, auch nicht Tangenten einer Kurve C_1, d. h. Verbindungslinien aufeinanderfolgender Punkte sein. Sind dagegen die Binormalen von C parallel, also die Schmiegungsebenen dieser Kurve zusammenfallend, d. h. ist C eine ebene Kurve, so wird die Binormalenfläche ein Zylinder, der auf der Ebene der Kurve C senkrecht steht, und sie fällt mit der rektifizierenden Fläche zusammen. In diesem Falle ist die der Kurve C durch Orthogonalität entsprechende isometrische Kurve C_1 eine den Binormalen von C parallele Gerade.

[16]) Das Vorzeichen von ϱ ist hier belanglos, da dem Krümmungsradius r_1 ein absoluter Wert zukommt.

Oder: die Kurve C_1 hat mit der Kurve C dasselbe sphärische Bild der Hauptnormalen und ihr Binormalen- und Tangentenbild fällt mit dem Tangenten- und Binormalenbild der Kurve C zusammen.

Die Berechnung des Torsionsradius liefert:

(13a) $$\varrho_1 = -r$$

d. h. der Torsionsradius der Kurve C_1 ist der absoluten Grösse nach gleich dem Krümmungsradius der Kurve C; oder: der Schmiegungswinkel der Kurve C_1 ist der Grösse nach gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt dem Kontingenzwinkel der Kurve C[17]). Da also

$$\frac{dr_1}{ds} = \frac{d\varrho}{ds}$$

$$\frac{d\varrho_1}{ds} = -\frac{dr}{ds},$$

so folgt, nach (16), für den Radius der Schmiegungskugel der Kurve C_1:

(16a) $$\mathfrak{R}_1^2 = \sqrt{\varrho^2 + r^2\left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2}.$$

Ferner ergibt sich, dass:

(17) $$\varrho \cdot \varrho_1 = -r r_1,$$

d. h. dass das Produkt der Torsionen der Kurven C und C_1 gleich dem negativen Produkt der Krümmungen beider Kurven ist, weiter: die Kurven C und C_1 haben stets Torsionen mit entgegengesetztem Vorzeichen, sind also entgegengesetzt gewunden[18]).

---

[17]) Die durch die Gleichungen (11a) und (13a) ausgedrückte bemerkenswerte Beziehung zwischen dem Schmiegungs- und Kontingenzwinkel zweier Kurven hat Fourier (vgl. Lancret, Mémoire sur les courbes à double courbure, Mémoires présentés par divers savans, Paris 1806, Bd. I, S. 420) als geltend für die Polarkurve in ihrer Relation zur ursprünglichen Kurve C erklärt. Lancret zieht aus der richtigen Erkenntnis dieser Winkelbeziehung die Folgerung, dass die Rückkehrkante der Polarfläche (Polarkurve) und diejenige der Tangentenfläche einer Kurve (d. i. die Kurve selbst) dann, wenn diese beiden Flächen in eine Ebene ausgebreitet sind, zwei ebene Kurven liefern, zwischen welchen folgende Relation besteht: die eine derselben hat als Krümmung die erste, die andere die zweite Krümmung der Kurve C selbst. Diese Folgerung ist, da die Bogenelemente beider Kurven doppelter Krümmung, aus welchen jene ebenen Kurven hervorgingen, in einem von 1 verschiedenen Verhältnis stehen, unrichtig, worauf bereits de Saint-Venant (Mémoire sur les lignes courbes non planes, in Journ. de l'Ecole Royale polyt. Paris 1845. 18. Bd. 30. H. S. 36) unter Berufung auf Olivier und Transon hinweist.

[18]) Vgl. dazu Anm. (15) und Gleichung (13a).

Die bisher gewonnenen Ergebnisse über die Beziehungen der Kurven C und C_1 erinnern an die Relationen einer Kurve mit ihrer Polarkurve (= Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln) und der Kurve ihrer Krümmungsmittelpunkte. Im allgemeinen sind jedoch die Kurven C_1 wesentlich von diesen beiden Kurven verschieden, da nach Gl. (3) das Bogenelement der Kurven C_1 = dem Bogenelement von C, der ursprünglich gegebenen Kurve, ist.

a) Die Kurve C_1 ist demnach nur für jene Kurven C die Polarkurve, für welche gesetzt werden kann:

$$ds_1 = \pm \left(\frac{r}{\varrho} + r' \varrho' + r'' \varrho \right) ds = ds ,$$

für welche sonach gilt:

$$\frac{r}{\varrho} + r' \varrho' + r'' \varrho = \pm 1 \text{ [19]} .$$

ϱ und r sind als Funktionen des Bogens s der Kurve zu denken. Da zwischen ihnen nur die eine eben angegebene Bedingung besteht [19], kann eine dieser Funktionen willkürlich angenommen werden, z. B. r = konstant. Dann ergibt sich: $\frac{r}{\varrho} = \pm 1$, d. h. die Kurve C_1 ist Polarkurve für Schraubenlinien auf Rotationszylindern, deren Krümmungs- und Torsionsradius gleich gross sind. Für diese beträgt der Steigungswinkel demnach 45° bezw. 135°, sie sind symmetrisch gleich, die eine rechts, die andere links um den Zylinder gewunden [20].

b) Kurve der Krümmungsmittelpunkte ist die Kurve C_1 für jene Kurven C, für welche gilt:

$$ds_1 = \frac{\mathfrak{R}}{\varrho} ds = ds \text{ [19]}$$

d. h.

$$\mathfrak{R} = \varrho$$

oder:

$$r^2 + \varrho^2 \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 = \varrho^2 ;$$

die eine natürliche Gleichung einer Kurve der geforderten Art ist mit dieser Beziehung gegeben. Als zweite Gleichung kann wieder eine beliebige Funktion r = f (s) gewählt werden.

---

[19] Vgl. hierzu Schell - Salkowski, a. a. O. S. 18, 56; Scheffers, a. a. O. S. 308.

[20] Vgl. hierzu Steiner, a. a. O. 25. April 1839.

Wir setzen r = konstant und erhalten:

$$r = \pm \varrho$$

d. h. die eben besprochene gewöhnliche Schraubenlinie.

Für diese ist die Kurve C_1 sonach nicht nur Polar- sondern auch Krümmungsmittelpunktskurve — in Uebereinstimmung mit dem Satz, dass für Kurven konstanter Krümmung die Polarkurve mit der Kurve der Krümmungsmittelpunkte zusammenfällt[21]).

Die Variierung der Funktionen r (s) und ϱ (s) ergibt die verschiedenen Kurven, deren Polar- bezw. Krümmungsmittelpunktskurve isometrisch mit der Ausgangskurve sind.

a) Ist die Kurve C eben, also $\varrho = \infty$, aber r nicht konstant, so wird $r_1 = \infty$, d. h. die Kurven C_1 sind Gerade und zwar Normale zur Ebene der Kurve C (vgl. Anm. 15).

b) Ist die Kurve C nicht eben, ihr Krümmungsradius r aber konstant = l, so wird ϱ_1 konstant $= -l$, $\frac{1}{r_1} \neq 0$, d. h. die Kurve C_1 eine Kurve konstanter Torsion.

c) Ist C eine Kurve doppelter Krümmung von konstantem Torsionsradius $\varrho = m$, so wird r_1 konstant = m, der Radius der Schmiegungskugel von C_1 ebenfalls konstant = m = Torsionsradius von C. Die Kurven C_1 werden sphärisch.

d) Ist die Kurve C eine allgemeine Schraubenlinie, d. h. $r = \varkappa \varrho$, so folgt, dass $\varrho_1 = -\varkappa \cdot r_1$, die Kurve C_1 sonach wieder allgemeine Schraubenlinie ist, deren Steigungswinkel δ_1 zu dem der ursprünglichen Schraubenlinie C (δ) in einer solchen Beziehung steht, dass $tg\delta_1 \cdot tg\delta = -1$; die beiden Winkel unterscheiden sich um $\frac{\pi}{2}$.

Wenn C eine Schraubenlinie auf einem Rotationszylinder ist, also $r = k_1$, $\varrho = k_2$, so folgt, dass $\varrho_1 = -k_1$, $r_1 = k_2$, d. h. die Kurve C_1 ebenfalls eine gewöhnliche Schraubenlinie auf einem Zylinder ist, dessen Achse parallel der des Zylinders, auf welchem C als Geodätische liegt, und dessen Grundkreisradius $= \varkappa \cdot r = \frac{k_2}{k_1} \cdot r$.

Ersichtlich sind, nach (11a) und (13a) die orthogonalisometrischen Paare gleicher Krümmung dargestellt durch Schraubenlinien, für welche ausserdem die Torsion gleichgross

[21]) Schell-Salkowski, a. a. O. S. 106.

(von entgegengesetztem Vorzeichen) wird, die also symmetrisch sind; sie genügen der Gleichung:

$$\frac{\varrho}{r} = \mp 1 ,$$

sind demnach Schraubenlinien, für welche der Steigungswinkel 135^0 bezw. 45^0 beträgt.

2^0. b. Wir setzen $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ gleich den Richtungskosinus der Binormalen der Kurve C. d. h.

$$(9)\quad \begin{aligned} \bar{a} &= r(y'z'' - z'y'') \quad \text{oder:} \quad a = \pm r(y'z'' - z'y'') \sin\omega \\ \bar{b} &= r(z'x'' - x'z'') \qquad\qquad b = \pm r(z'x'' - x'z'') \sin\omega \\ \bar{c} &= r(x'y'' - y'x'') \qquad\qquad c = \pm r(x'y'' - y'x'') \sin\omega . \end{aligned}$$

Die Ebene ε, demnach bestimmt durch Richtung von Tangente und Binormale der Kurve C, ist jeweils parallel der rektifizierenden Ebene von C.

Die Tangente der Kurve $\mathfrak{C}$, $d\mathfrak{f}$, ist also parallel der Hauptnormalen der Kurve C und zwar, wie sich aus (5a) und (9) ergibt, ungleichsinnig, d. h.

$$\frac{d\mathfrak{x}}{ds} = -\cos\lambda$$

$$\frac{d\mathfrak{y}}{ds} = -\cos\mu$$

$$\frac{d\mathfrak{z}}{ds} = -\cos\nu .$$

Die Kurven C_1 sind Isogonaltrajektorien der rektifizierenden Ebenen von C und nach (6) gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx_1 &= k\,dx \pm \sqrt{1-k^2}\cos\lambda\,ds \\ dy_1 &= k\,dy \pm \sqrt{1-k^2}\cos\mu\,ds \\ dz_1 &= k\,dz \pm \sqrt{1-k^2}\cos\nu\,ds . \end{aligned}$$

Wir erhalten sonach:

$$(9a)\quad \begin{aligned} \cos\alpha_1 = x_1' &= k\cos\alpha \pm \sqrt{1-k^2}\cos\lambda = \cos\omega\cos\alpha \pm \sin\omega\cos\lambda \\ \cos\beta_1 = y_1' &= k\cos\beta \pm \sqrt{1-k^2}\cos\mu = \cos\omega\cos\beta \pm \sin\omega\cos\mu \\ \cos\gamma_1 = z_1' &= k\cos\gamma \pm \sqrt{1-k^2}\cos\nu = \cos\omega\cos\gamma \pm \sin\omega\cos\nu ; \end{aligned}$$

zur Bestimmung der Funktionen x_1, y_1 z_1 selbst integriert man, wie folgt:

$$x_1 = \int \left(\cos\omega \cdot x' \pm \sin\omega \cdot \frac{x''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} \right) ds + A$$

(9b) $$y_1 = \int \left(\cos\omega \cdot y' \pm \sin\omega \cdot \frac{y''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} \right) ds + B$$

$$z_1 = \int \left(\cos\omega \cdot z' \pm \sin\omega \cdot \frac{z''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} \right) ds + C .$$

Die weitere Rechnung ergibt für den Krümmungsradius der Kurve C_1:

(18) $$r_1 = \left| \frac{r\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + r^2 \sin^2\omega}} \right|$$

und für den Winkel δ der Schmiegungsebene von C_1 mit jener der Kurve C:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{d\vartheta}{d\tau} \sin\omega .$$

Für die Richtungskosinus der Hauptnormalen von C_1 berechnet man:

$$\cos\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + r^2 \sin^2\omega}} \left[\varrho \left(\mp \sin\omega \cos\alpha + \cos\omega \cos\lambda \right) \mp r \sin\omega \cos\varphi \right]$$

(19) $$\cos\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + r^2 \sin^2\omega}} \left[\varrho \left(\mp \sin\omega \cos\beta + \cos\omega \cos\mu \right) \mp r \sin\omega \cos\chi \right]$$

$$\cos\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + r^2 \sin^2\omega}} \left[\varrho \left(\mp \sin\omega \cos\gamma + \cos\omega \cos\nu \right) \mp r \sin\omega \cos\psi \right] .$$

Für die Richtungskosinus der Binormalen von C_1 folgt:

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + r^2 \sin^2\omega}} \left[\pm r \sin\omega \left(\mp \sin\omega \cos\alpha + \cos\omega \cos\lambda \right) + \varrho \cos\varphi \right]$$

(20) $$\cos\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + r^2 \sin^2\omega}} \left[\pm r \sin\omega \left(\mp \sin\omega \cos\beta + \cos\omega \cos\mu \right) + \varrho \cos\chi \right]$$

$$\cos\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + r^2 \sin^2\omega}} \left[\pm r \sin\omega \left(\mp \sin\omega \cos\gamma + \cos\omega \cos\nu \right) + \varrho \cos\psi \right] .$$

Aus Vorstehendem ergibt sich: der Kosinus des Winkels: Zwischen Hauptnormale von C und Hauptnormale von $C_1 = \frac{\cos\omega}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\varrho} \sin\omega \right)^2}}$. Zwischen Binormale von C und Binormale von $C_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\varrho} \sin\omega \right)^2}}$. Zwischen Tangente von C und Haupt-

normale von $C_1 = \mp \frac{\sin\omega}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{\varrho}\sin\omega\right)^2}}$. Zwischen Hauptnormale von C und Tangente von $C_1 = \pm \sin\omega$, also konstant. Zwischen Tangente von C und Binormale von $C_1 = -\frac{\sin^2\omega}{\sqrt{\sin^2\omega+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}$. Zwischen Binormale von C und Tangente von $C_1 = 0$; die beiden Geraden stehen also aufeinander senkrecht. Zwischen Hauptnormale von C und Binormale von $C_1 = \pm \frac{\cos\omega\sin\omega}{\sqrt{\sin^2\omega+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}$. Zwischen Binormale von C und Hauptnormale von $C_1 = \mp \frac{\sin\omega}{\sqrt{\sin^2\omega+\left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}}$.

Für den Torsionsradius von C_1 berechnet man:

$$(21)\quad \varrho_1 = \pm \frac{\varrho^2 + r^2\sin^2\omega}{\varrho^2\left(\frac{\sin\omega}{\varrho}\frac{dr}{ds} \pm \frac{\cos\omega}{\varrho}\right) + r^2\sin^2\omega\left(\pm\frac{\cos\omega}{\varrho} - \frac{1}{r\sin\omega}\frac{d\varrho}{ds}\right)}.$$

Sonach erhält man für den Radius, bezw. den Winkel der ganzen Krümmung von C_1:

$$(22)\quad \frac{1}{r_1^2} = \left(\frac{dt_1}{ds}\right)^2 = \frac{\varrho^2 + r^2\sin^2\omega}{r^2\varrho^2} + \left(\pm\frac{\sin\omega\left(\varrho\frac{dr}{ds} - r\frac{d\varrho}{ds}\right) \pm \varrho\cos\omega\left(1+\left(\frac{r\sin\omega}{\varrho}\right)^2\right)}{\varrho^2 + r^2\sin^2\omega}\right)^2.$$

Die Richtungskosinus der rektifizierenden Geraden von C_1 bestimmen sich durch die Formeln:

$$(23)\quad \cos\alpha_1 = \frac{\varrho\left(\varrho^2+r^2\sin^2\omega\right)\cos\varphi - r\left(\varrho^2+r^2\sin^2\omega \pm \varrho\cos\omega\sin\omega\left(\varrho\frac{dr}{ds} - r\frac{d\varrho}{ds}\right)\right)\cos\alpha - r\varrho\sin^2\omega\left(\varrho\frac{dr}{ds} - r\frac{d\varrho}{ds}\right)\cos\lambda}{\sqrt{\left(\varrho^2+r^2\sin^2\omega\right)^3 + r^2\varrho^2\left\{\pm\sin\omega\left(\varrho\frac{dr}{ds} - r\frac{d\varrho}{ds}\right) + \varrho\cos\omega\left(1+\left(\frac{r\sin\omega}{\varrho}\right)^2\right)\right\}^2}}$$

Biblioteka Politechniki Lwowskiej

$$\cos b_1 = \frac{\varrho\left(\varrho^2+r^2\sin^2\omega\right)\cos\chi - r\left(\varrho^2+r^2\sin^2\omega \pm \varrho\cos\omega\sin\omega\left(\varrho\frac{dr}{ds}-r\frac{d\varrho}{ds}\right)\right)\cos\beta - r\varrho\sin^2\omega\left(\varrho\frac{dr}{ds}-r\frac{d\varrho}{ds}\right)\cos\mu}{\sqrt{\left(\varrho^2+r^2\sin^2\omega\right)^3+r^2\varrho^2\left\{\pm\sin\omega\left(\varrho\frac{dr}{ds}-r\frac{d\varrho}{ds}\right)+\varrho\cos\omega\left(1+\left(\frac{r\sin\omega}{\varrho}\right)^2\right)\right\}^2}}$$

$$\cos c_1 = \frac{\varrho\left(\varrho^2+r^2\sin^2\omega\right)\cos\psi - r\left(\varrho^2+r^2\sin^2\omega \pm \varrho\cos\omega\sin\omega\left(\varrho\frac{dr}{ds}-r\frac{d\varrho}{ds}\right)\right)\cos\gamma - r\varrho\sin^2\omega\left(\varrho\frac{dr}{ds}-r\frac{d\varrho}{ds}\right)\cos\nu}{\sqrt{\left(\varrho^2+r^2\sin^2\omega\right)^3+r^2\varrho^2\left\{\pm\sin\omega\left(\varrho\frac{dr}{ds}-r\frac{d\varrho}{ds}\right)+\varrho\cos\omega\left(1+\left(\frac{r\sin\omega}{\varrho}\right)^2\right)\right\}^2}}.$$

Für den Radius der Schmiegungskugel von C_1 erhält man:

$$(24)\quad \mathfrak{R}_1^2 = \frac{1}{\varrho^2+r^2\sin^2\omega}\left[r^2\varrho^2+\left(\frac{\varrho^3\frac{dr}{ds}+r^3\frac{d\varrho}{ds}\sin^2\omega}{\varrho^2\left(\frac{\sin\omega}{\varrho}\frac{dr}{ds}\pm\frac{\cos\omega}{\varrho}\right)+r^2\sin^2\omega\left(\pm\frac{\cos\omega}{\varrho}-\frac{1}{r\sin\omega}\frac{d\varrho}{ds}\right)}\right)^2\right].$$

Beispiele: a) Ist die Kurve C eben, also $\varrho=\infty$, r nicht konstant, so folgt, dass $r_1 = r$, $\varrho_1 = \infty$ wird, d. h. die Kurve C_1 ist eine ebene Kurve mit der natürlichen Gleichung der Kurve C. Ist die Kurve C ein Kreis, also r konstant, so wird die Kurve C_1 ein Kreis mit Radius von gleicher Länge, in einer Parallelebene zur Ebene des Kreises C, gegen den ursprünglichen Kreis um den Winkel ω gedreht. ($x_1 = -y$, $y_1 = +x$).

b) Ist die Kurve C eine gewöhnliche Schraubenlinie, also r konstant $= \varkappa_1$, ϱ konstant $= \varkappa_2$, so werden r_1 und ϱ_1 ebenfalls konstant, d. h. die Kurve C_1 ist eine Schraubenlinie auf einem Rotationszylinder mit Grundkreis von Radius r und einer Achse, die parallel der Achse des Zylinders der Schraubenlinie C ist.

Ist die Kurve C eine allgemeine Schraubenlinie, somit $\frac{\varrho}{r}$ konstant $= \varkappa$, so wird $r_1 = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2+\sin^2\omega}}\cdot r$, ϱ_1 = konstant =

$\pm \frac{\varkappa}{\cos\omega} r$, d. h. die Kurve C_1 allgemeine Schraubenlinie auf einem Zylinder mit zur Achse des Zylinders der Kurve C parallelen Achse.

Bei Orthogonalität der isometrischen Kurven von C nach 2°. b) ergibt sich die Lösung der Gleichungen (4) durch die Festsetzung:

Die Tangente der Kurve C_1, identisch mit der Tangente von $\mathfrak{C}$, ist parallel (gleich oder entgegengesetzt gerichtet) der Hauptnormalen der Kurve C. Demnach erhält man:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \pm\cos\lambda \\ \cos\beta_1 &= \pm\cos\mu \\ \cos\gamma_1 &= \pm\cos\nu . \end{aligned} \tag{9a'}$$ [22])

Die Tangente von C_1 liegt in einer Parallelebene zur Schmiegungsebene von C, mit der Tangente von C einen Winkel von 90° bildend.

Die Normalebene von C_1 steht also senkrecht auf der Schmiegungsebene von C, sie ist parallel der rektifizierenden Ebene dieser Kurve; hieraus folgt, dass die Hüllfläche der Normalebenen von C_1, d. i. deren Achsen- oder Polarfläche, parallel der rektifizierenden Fläche von C ist.

Aus Gl. (18) folgt für den Krümmungsradius der Kurve C_1:

$$r_1 = \left| \frac{r\varrho}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}} \right|$$

oder:

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varrho^2}, \tag{18a}$$

d. h. das Quadrat des reziproken Wertes vom Krümmungsradius der Kurve C_1 ist gleich der Quadraten-Summe der reziproken Werte von Krümmungs- und Torsionsradius der Kurve C, oder auch: das Quadrat der ganzen Krümmung von C_1 ist gleich der Summe der Quadrate von Krümmung und Torsion der Kurve C.

---

[22]) Obwohl die Tangenten der Kurve C_1 in entsprechenden Punkten den Hauptnormalen von C parallel sind, ist doch die abwickelbare Tangentenfläche von C_1 in korrespondierenden Punkten nicht parallel der Fläche der Hauptnormalen von C; denn diese ist für alle nicht ebenen Kurven eine windschiefe Regelfläche. Es können deshalb auch die Hauptnormalen von C niemals zugleich Tangenten der Kurve C_1, d. h. Verbindungslinien aufeinanderfolgender Punkte sein. — Fallen dagegen je zwei aufeinanderfolgende Schmiegungsebenen zusammen, d. h. ist die Kurve C eben, so liegen alle ihre Hauptnormalen in dieser Ebene und berühren die in der Kurvenebene liegende Evolute von C, welche jedoch nur in bestimmten Fällen isometrische Orthogonalkurve der Kurve C ist. Vgl. auch S. 128 ff.

Nach dem Lancretschen Satze[23]), dessen Ausdruck die obige Formel ist, wenn wir den Krümmungsradius $r_1 = r$, dem Radius der ganzen Krümmung der Kurve C, setzen, folgt hieraus:

Der Krümmungsradius der Kurve C_1 ist gleich dem Radius der ganzen Krümmung der Kurve C, oder anders ausgedrückt:

$$d\tau_1 = |\, dt \,|,$$

d. h. der Kontingenzwinkel der Kurve C_1, dem absoluten Betrage nach gleich dem Schmiegungswinkel der Gratlinie der rektifizierenden Fläche von C, ist gleich dem Winkel dt der ganzen Krümmung der Kurve C, was mit der für orthogonal-isometrische Kurven die Lösung nach (2⁰.b) bedingenden Festsetzung (9a') identisch ist.

Demnach ist die Schmiegungsebene der Kurven C_1 parallel der Ebene der ganzen Krümmung der Kurve C und steht daher auf der rektifizierenden Geraden von C senkrecht.

Für die Richtungskosinus der Binormalen von C_1 berechnet sich der Wert:

$$\text{(20a)} \qquad \begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \frac{1}{\sqrt{r^2+\varrho^2}}(\varrho\cos\varphi - r\cos\alpha) = \cos\mathfrak{a} \\ \cos\chi_1 &= \frac{1}{\sqrt{r^2+\varrho^2}}(\varrho\cos\chi - r\cos\beta) = \cos\mathfrak{b} \\ \cos\psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{r^2+\varrho^2}}(\varrho\cos\psi - r\cos\gamma) = \cos\mathfrak{c}, \end{aligned}$$

d. h. die Binormale, also auch die Krümmungsachse, der Kurve C_1 ist parallel der rektifizierenden Geraden von C[24]); es ist demnach der Schmiegungswinkel $d\vartheta_1$ der Kurve C_1 gleich dem negativen Kontingenzwinkel der Gratlinie der rektifizierenden Fläche und gleich dem negativen Differential des Winkels H, welchen die rektifizierende Gerade mit der Tangente von C bildet.

Für den Torsionsradius der Kurve C_1 ergibt Gl. (21):

$$\text{(21a)} \qquad \varrho_1 = -\frac{r^2+\varrho^2}{r\dfrac{d\varrho}{ds} - \varrho\dfrac{dr}{ds}} = -\frac{r}{\varrho} : \frac{d\left(\dfrac{r}{r}\right)}{ds}.$$

---

[23]) Lancret, Mémoire sur les courbes à double courbure, Mémoires des Savans étrangers. Paris 1806, Bd. I, S. 430. Schell-Salkowski, a. a. O. S. 27.

[24]) Vgl. Schell-Salkowski, a. a. O. S. 30.

Für den Radius r_1 der ganzen Krümmung der Kurve C_1 erhält man:

$$\frac{1}{r_1^2} = \frac{1 + \left(\varrho \frac{d\frac{r}{r}}{ds}\right)^2}{r^2}, \tag{22a}$$

hieraus für den Winkel der ganzen Krümmung von C_1:

$$dt_1 = \frac{\sqrt{1 + \left(\varrho \frac{d\frac{r}{r}}{ds}\right)^2}}{r} ds$$

oder:

$$(dt_1)^2 = (d\tau_1)^2 + (d\vartheta_1)^2 = (dt)^2 + (dH)^2$$

d. h. der Winkel der ganzen Krümmung von C_1 ist gleich dem Winkel der ganzen Krümmung der Gratlinie der rektifizierenden Fläche von C. Aus der Voraussetzung (9a) und weiteren Berechnungen ersieht man: die Hauptnormale von C und die Tangente von C_1 sind einander parallel.

Die Hauptnormale von C steht senkrecht auf der Haupt- und der Binormalen von C_1, die Binormale von C bildet mit der Tangente von C_1 einen rechten Winkel.

Die Binormale von C und die Binormale von C_1 schliessen einen Winkel ein, dessen Kosinus gleich ist $\frac{\varrho}{\sqrt{r^2+\varrho^2}} = \frac{r_1}{r} = \cos J$, d. h. gleich dem Kosinus des Winkels zwischen rektifizierender Geraden und Binormalen von C.

Der Kosinus des Winkels zwischen Tangente von C und Hauptnormalen von $C_1 = -\frac{\varrho}{\sqrt{r^2+\varrho^2}} = -\frac{r_1}{r} = -\cos J$. Die beiden letztgenannten Winkel ergänzen sich also zu 180^0.

Die Tangente von C und die Binormale von C_1 schliessen den Winkel H ein, den Winkel zwischen rektifizierender Geraden und Tangente von C, dessen Kosinus $= \frac{-r}{\sqrt{r^2+\varrho^2}} = -\frac{r_1}{\varrho}$; denselben Winkel bilden die Hauptnormale von C_1 und die Binormale von C.

Weiter findet man: der Schmiegungswinkel der Kurve C ist gleich dem Produkt aus dem negativen Kosinus des Winkels zwischen Tangente von C und Binormale von C_1 in den Kontingenzwinkel von C_1:

$$d\vartheta = -\cos H \cdot d\tau_1 .$$

Der Sinus jenes Winkels zwischen Tangente von C und Binormale von C_1 = dem Sinus des Winkels zwischen Tangente und rektifizierender Geraden von C, ist gleich dem Quotienten, dessen Zähler der Kontingenzwinkel von C, dessen Nenner der Kontingenzwinkel von C_1 ist:

$$\sin H = \frac{d\tau}{d\tau_1}.$$

Der Kontingenzwinkel von C_1 ist daher nie grösser als der Kontingenzwinkel von C.

Beispiele: Ist $\frac{\varrho}{r}$ konstant $= \varkappa$, also C eine allgemeine Schraubenlinie, so folgt: r_1 = proportional $r = \frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}} r$, $\varrho_1 = \infty$, d. h. die Kurve C_1 ist eine ebene Kurve; ihre Ebene steht senkrecht zur Erzeugenden des Zylinders, auf welchem die Schraubenlinie Geodätische ist.

Ist im besonderen r = konstant $= k_1$, ϱ konstant $= k_2$, C also eine Schraubenlinie auf einem Rotationszylinder, so ist, da dann r_1 ebenfalls konstant $= \frac{k_1 \cdot k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$ wird, $\varrho_1 = \infty$, die Kurve C ein Kreis.

Die vorstehend ausgeführten Beziehungen zwischen C und C_1 haben grosse Aehnlichkeit mit den Relationen, welche zwischen einer Raumkurve und deren Filarevolventen bestehen. Doch sind die Kurven C_1 nach (2b) von letzteren wesentlich verschieden: die Filarevolventen liegen nur auf der Tangentenfläche der Kurve selbst und ihr Bogenelement ist:

$$ds_f = ds \left(\frac{s-a}{r}\right).$$

Die Kurven C_1 nach (2^0.b) sind also nur für jene Kurven C Filarevolventen, für welche gilt:

$$\frac{s-a}{r} = \pm 1\ ^{25}).$$

Zur vollständigen Berechnung der Gleichung dieser in natürlichen Koordinaten gegebenen Kurve, ausgedrückt in x, y, z als Funktionen von s, wählen wir den von Liouville[26]) vorgeschlagenen Weg und setzen:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = \sin\alpha \sin i$$

---

[25]) Scheffers a. a. O. S. 296.

[26]) Liouville, Note I: Sur les courbes à double courbure, in Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie. Paris 1850. S. 549.

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = \sin\alpha \cos i ,$$

wobei:

$$d\alpha = \sin\varphi(s)\,\frac{ds}{r}$$

$$\sin\alpha\, di = \cos\varphi(s)\,\frac{ds}{r}$$

und die Funktion φ (s) ganz willkürlich ist.

Indem wir diese Funktion variieren, erhalten wir verschiedene Kurven, welche die geforderte Eigenschaft: $\pm r = s - a$ besitzen:

a) Wir setzen: $\varphi(s) = 0$; dann ergibt sich: (unter Weglassung der Integrationskonstanten) $d\alpha = 0$; $\alpha = \text{konstant} = k$; $\sin\alpha = \text{konstant} = k_0$; $\cos\alpha = \text{konstant} = k_1$.

$$di = \frac{\pm ds}{k_0 (s-a)}; \quad i = \pm \frac{1}{k_0} \ln (s-a);$$

hieraus folgt:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = k_1 ;$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = k_0 \sin \frac{\pm 1}{k_0} \ln (s-a)$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = k_0 \cos \frac{\pm 1}{k_0} \ln (s-a)$$

und sohin:

$$x = k_1 s$$

$$y = k_0^3 (s-a)\,\frac{\sin \frac{\pm 1}{k_0} \ln (s-a) - \frac{1}{k_0} \cos \frac{\pm 1}{k_0} \ln (s-a)}{1 + k_0^2}$$

$$z = k_0^3 (s-a)\,\frac{\cos \frac{\pm 1}{k_0} \ln (s-a) + \frac{1}{k_0} \sin \frac{\pm 1}{k_0} \ln (s-a)}{1 + k_0^2} .$$

Die letzten drei Gleichungen sind die Parameterdarstellung einer konischen Spirale, des Schnittes des Kegels:

$$y^2 + z^2 - \frac{k_0^4 (x - a k_1)^2}{k_1^2 (1 + k_0^2)} = 0$$

mit dem Zylinder:

$$y = \frac{k_0^3 (x - a k_1)}{k_1 (1 + k_0^2)} \left\{ \sin \frac{\pm 1}{k_0} \ln \frac{x - a k_1}{k_1} - \frac{1}{k_0} \cos \frac{\pm 1}{k_0} \ln \frac{x - a k_1}{k_1} \right\}.$$

b) Wir setzen: $\varphi(s) = \frac{\pi}{2}$ und erhalten:

$$d\alpha = \frac{\pm ds}{s-a}; \quad \alpha = \pm \ln(s-a);$$

$di = 0$; $i = \text{konstant} = k_2$; $\sin i = \text{konstant} = k_3$; $\cos i = \text{konstant} = k_4$;

dann ergibt sich:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \cos\left(\pm \ln(s-a)\right)$$

$$\cos\beta = \frac{dy}{ds} = k_3 \sin\left(\pm \ln(s-a)\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{ds} = k_4 \sin\left(\pm \ln(s-a)\right);$$

hieraus folgt:

$$x = (s-a)\,\frac{\cos\left(\pm \ln(s-a)\right) + \sin\left(\pm \ln(s-a)\right)}{2}$$

$$y = k_3(s-a)\,\frac{\sin\left(\pm \ln(s-a)\right) - \cos\left(\pm \ln(s-a)\right)}{2}$$

$$z = k_4(s-a)\,\frac{\sin\left(\pm \ln(s-a)\right) - \cos\left(\pm \ln(s-a)\right)}{2}.$$

Die letzten drei Gleichungen stellen in Parameterform eine ebene Kurve dar, den Schnitt der Ebene:

$$\frac{y}{k_3} - \frac{z}{k_4} = 0$$

mit dem Zylinder:

$$2e \qquad \arccos\frac{-8xy}{k_3\left(x^2 + \frac{y^2}{k_3^2}\right)} = x^2 + \frac{y^2}{k_3^2}.$$

Durch Variierung der Funktion $\varphi(s)$ ergeben sich die übrigen Kurven C_1 nach 2^0.b), welche zugleich Filarevolventen von C sind. Doch bietet die weitere Aufstellung solcher Beziehungen hier keine für die Lösung des Problems der Arbeit verwertbaren Resultate.

Vergleichend die Ergebnisse der Berechnungen von 2^0.a) und 2^0.b) lässt sich feststellen:

Eine Kurve kann niemals zugleich Kurve C_1 nach 2^0.a) und 2^0. b) derselben Raumkurve C sein.

Die Kurven C_1 nach 2°.a) und jene nach 2°.b) sind unter sich isogonal-isometrisch. Ihre Tangenten kreuzen sich unter einem Winkel ω', für welchen gilt:

$$\cos\omega' = \cos^2\omega,$$

d. h. der Kosinus dieses Winkels ist gleich dem Quadrat des Kosinus jenes Winkels, welcher den Kreuzungswinkel der Kurventangenten von C_1 nach 2°.a) bezw. 2°.b) mit den Tangenten der Kurve C darstellt.

Sind die Kurven C_1 nach 2°.a) und 2°.b) jeweils orthogonal der isometrischen Kurve C, so sind ihre Tangenten selbst zu einander orthogonal.

Schliesslich sei noch dargestellt, in welcher Weise sich die in der Einleitung und im Text mehrfach erwähnten besonderen Gattungen von isogonalen — aber nicht notwendig mit C isometrischen — Kurven in den für die Isogonalität zweier Kurven allgemein gültigen Gleichungen (2) ergeben.

Man erhält:

a) die Bertrandschen Kurven, wenn man setzt: $a = \pm\sin\omega\cos\lambda$; $b = \pm\sin\omega\cos\mu$; $c = \pm\sin\omega\cos\nu$; $\frac{ds_1}{ds} = \pm\sqrt{\left(1-\frac{l}{r}\right)^2+\frac{l^2}{\varrho^2}}$, wobei l den konstanten Abstand entsprechender Punkte auf der gemeinsamen Hauptnormalen bedeutet.

b) die Polarkurve von C, für: $k=0$; $a = \pm\cos\lambda$; $b = \pm\cos\mu$; $c = \pm\cos\nu$; $\frac{ds_1}{ds} = \pm\left(\frac{r}{\varrho}+r'\varrho'+r''\varrho\right)$;

c) die Kurve der Krümmungsmittelpunkte von C, für: $k=0$; $a = \pm\cos\lambda$; $b = \pm\cos\mu$, $c = \pm\cos\nu$; $\frac{ds_1}{ds} = \frac{\mathfrak{R}}{\varrho}$;

d) die Filarevolventen von C, für: $k=0$; $a = \pm\cos\varphi$; $b = \pm\cos\chi$; $c = \pm\cos\psi$; $\frac{ds_1}{ds} = \pm\frac{s-a_0}{r}$, wobei a_0 eine Konstante bedeutet.

Damit erscheinen diese Kurven, wie eingangs behauptet, sämtlich als Spezialfälle der allgemeinen Isogonalität (Gl. 2), entstanden durch die besondere Wahl der Funktionen a, b, c und des Verhältnisses entsprechenden Bogenelemente.

Pataisos — Berichtigungen.

1. S. 34. Z. 3. v. o. lies statt „šių lygčių pagelba konformį vaizdą", „yra tyrinėjęs konformį vaizdą nustatytą santykiu".
2. S. 59. Anm. 2 lies S. 53.
3. S. 64 fehlen die beiden Anmerkungen:
   1) vergl. Einleitung S. 53
   2) vergl. Einleitung S. 53 f.
4. S. 67. Anm. 1 lies: „dont le terme général dépend des deux angles . . . ".

1923 m. Lietuvos Universiteto Botanikos Sodnas, Kabinetas ir Muzejus.

I.

1923 metų liepos mėn. 8 dieną, dalyvaujant Ponui Respublikos Prezidentui, aukštesniesiems Valstybės valdininkams ir visuomenės atstovams, buvo pašventintas Botanikos Sodnas ir padėti pamatai šiltnamiams.

Priruošiamieji sodnui steigti darbai buvo pradėti pavasarį 1922 m., kada šio stripsnio autorius, dabartinis Botanikos Sodno vedėjas, kartu su Žemės Ūkio ir Valstybės Turtų Ministerijos atstovu apžiūrinėjo tinkamas Botanikos Sodnui steigti vietas prie Kauno. Birželio mėnesio pradžioje galūtinai buvo išrinkta vieta Aukštosios Frėdos dvare, kurio parkas, tvenkiniai, kalvos, pelkės ir augančių medžių rūšių dauguma savo padėtim daugiausia atatiko sodno išplanavimui.

Greitai buvo iškeltas A. Frėdos dvaro perdavimo klausimas Universitetui Botanikos Sodno įtaisymui Matematikos-Gamtos fakulteto ir Agronomijos-Miškininkystės reikalams. Dvaro perdavimas įvyko vasario mėnesy 1923 metais kartu su žemesniąja Sodininkystės — daržininkystės mokykla. Kovo mėnesio pabaigoje prasidėdo Botanikos Sodno rengimo darbai. Reikalinga buvo išretinti pertankiai suaugę topoliai — Kauno tvirtovės liekana, išvalyti užleistas parkas ir duoti daugmečiams augalams vietos. Birželio mėnesyje pavyko nuvalyti žemės plotas, kuriame galima buvo pasodinti Karaliaučiaus Botanikos Sodno paaukuoti augalai.

Pirmi sodno gyvavimo metai praėjo priruošiamiems darbams. Antrais jau — 1924 metais prasidėjo viso ploto užsodinėjimas augalais.

Sodnas su buvusios Kauno tvirtovės fortu, pylimais, grioviais ir duobėmis užima apie 30 ha.

Tvenkinių, parko ir tuštumų, anksčiau naudotų ganykloms, nužiūrėtas toks išplanavimas:

1. Parke, jį išvalius, bus sodinamos medžių rūšys, reikalaujančios uždengtos vietos, kaip antai: Bukai, Liriodendron, Chamaecyparis, Rhododendron, Azalea, Ginkgo ir kiti. Medžių pavėsyje bus prisėta ir prisodinta įvairių Lietuvos ir užsienio žolinių augalų, mėgstančių pavėsį — Crocus, Galanthus Gludišius, Scilla, ir kiti. Parkas turės miško įžvaizdą, kuriame bus auginama įvairiausių dėkoratyvių medžių, krūmų ir žolių, pakenčiančių Lietuvos klimatą.

2. Arboretum bus parko tęsinys, kuriame bus auginama sistėmatinėje tvarkoje medinių augalų rūšys mokslo reikalams — gamtininkams, girininkams, dendrologams.

3. Systematicum — sistėmatinėj tvarkoj surinkti žolynai, augalai ir krūmai mokslo reikalams.

4. Rozarium — surinktos įvairiausių rūšių rožės.

5. Kultūrinių augalų skyrius, kuriame auginami parodymui medicinos augalai, javai, pašariniai ir ankštiniai augalai, pluoštiniai, aliejiniai, garduminiai augalai ir daržovės. Tasai skyrius jau įrengtas.

6. Alpinetum kalnų augalams sodinti (išplanavimas numatytas tvirtovės pylimuose).

7. Balų ir vandenų augmenija — tvenkiniuose ir balose.

8. Tyrų augmenija — forto pylimuose.

9. Vaisynas — pavyzdingas vaisinis sodnas.

10. Dėkoratyviai vienmečiai ir daugmečiai augalai pagražinimui.

11. Medelynas.

Balandžio mėnesyje buvo pakviestas iš Vokietijos žinomas sodnų architektas Karolis Rauth'as (prieš karą daug metų dirbęs Rygoje) smulkaus Botanikos Sodno planui sudaryti. Be tokio plano darbas yra negalimas. 1923 ir 1924 metais pavyko gauti mainais apie 100 rūšių augalų sėklų, augančių Lietuvoje, ir 1923 metais buvo surinkta 78 sėklų rūšių Botanikos Sodne. Tų augalų sąrašai buvo išsiuntinėti į viso pasaulio Botanikos Sodnus. Susitvarkius mainams Botanikos Sodnas gavo apie 600 rūšių įvairių augalų. Sėklos gautos iš sekančių Botanikos Sodnų: Marburg'o, Hamburg'o, Göteborg'o, Uppsala, Bern'o,

Zürich'o, Kopenhagos, Edinburg'o, Helsingfors'o, Belgrad'o, Pragos, Petrograd'o, Kopenhagos, Tiflis'o ir daug kitų.

Balandžio mėnesyje 1923 m. Karaliaučiaus Botanikos Sodnas paaukojo daugiamečių augalų kolekciją iš 30 rūšių. Rugpiūčio mėn. Berlyn'o Botanikos Sodnas Dahlem'e prisiuntė 198 augalus šiltnamiui. Spalio mėnesyje tas pats sodnas prisiuntė 38 augalus šiltnamiui, 117 rūšių sistematikum'ui ir 70 rūšių medelių ir krūmų parkui. Karaliaučiaus Botanikos Sodnas prisiuntė 60 augalų šiltnamiui šiltųjų kraštų augalų kolekciją. Lapkričio mėnesyje Petrogrado Botanikos Sodnas prisiuntė 87 rūšis tyrų augalų sėklų.

1924 metų pradžioje laukiama iš įvairių Botanikos Sodnų didelių partijų sėklų.

Spygliuočių medžių ir krūmų kolekcija pirkta Berlyne pas Späth'ą, o svogūniniai, viena ir daugiamečiai pas Stoffel'į Kaune.

Dabartiniu laiku Botanikos Sodnas turi 30 rūšių spygliuotųjų medžių ir krūmų, virš 188 rūšių lapuotų medžių ir krūmų, apie 1000 augalų šiltnamyje ir daugiamečių augalų, išaugintų iš sėklų, ir arti 500 paaukotų rūšių. Augąs parke Platanus occidentalis gana retas medis Lietuvoje. Taipgi pasodinta Juglans nigra, J. rupestris, Taxus 3 rūšys, Tsuga canadensis, Pseudotsuga Douglasii, Picea 7 rūšys, Juniperus 4 rūšys, Pinus montana, Buxus sempervirens, Spiraea apie 40 rūšių ir daug kitų.

Vienas pirmųjų uždavinių, Botanikos Sodną steigiant, buvo šiltnamių pastatymas. Šiltnamis, esantis A. Frėdos dvare, jokiu būdu negalėjo patenkint Botanikos Sodno reikalavimų. Viena, kad delei blogos konstrukcijos reikalauja savo apšildymui daug kuro; antra, labai mažai įšyla. Be to jisai aptarnauja tik sodininkystės-daržininkystės mokyklą. Visų pirmiausia Botanikos Sodnui reikėjo turėti šiltnamį šiltųjų kraštų augalams auginti, kuriame taip pat galima būtų veisti iš sėklų augalus sodinimui sodne. Turėta omeny, kad su laiku reikės sodnui statyti kelių typų šiltanmius, kaip antai: šaltus, vidutinius ir šiltus — palmems, orchidejoms ir kaktusams. Buvo sustatytas šiltnamiams planas, kurių statymas galima dalimis atlikti. Iš konkuruojančių firmų daugiausia atatiko Höntsch'o projektas, žinomos visam pasaulyje firmos, stačiusios šiltnamius įvairiose pasaulio dalyse.

Apsvarsčius tam tikrai komisijai, projektas buvo priimtas ir prasidėjo statymo darbas su išskaitliavimu, kad katilinis skyrius atatiktų visiems šiltnamiams ir kad ateityje nereikėtų perstatinėti. Kaminas apskaitliuotas visiems šiltnamiams ir todel išrodė neproporcionalus pastatytam šiais metais vienam nedideliam šiltnamiui, kurio dydis sekantis: 15 metr. ilgio, 5 metr. pločio ir 5 metr. aukščio.

Dabar šiltnamyje yra apie 1000 rūšių augalų, kurių dalį paaukojo Berlyno ir Karaliaučiaus Botanikos sodnai, o kitus išaugino sodnas iš sėklų. Daug kas pačiu auginama, tarpe kurių yra Manihot, iš kurio gamina „tapioka", ir šiltųjų krastų duona „kasava", Carludovika palmata, iš kurios lapų dirba tikrąsias skrybeles „panamas", Carica Papaya, turinčią daug ypatybių, Coffea robusta ir arabica — kavos medžiai, arbatos medelis, Tamarindus indica, Crescentia Cujete — iš vaisių kevalų daro indus, Garcinia Livingstonei — iš syvų daro „gumigutą", Haemanthus — labai nuodingas augalas, Marantha, iš kurios gamina „Arrow-root", Aleurites, iš kurio syvų gamina guminius lakus ir „šelaką", kuri staliai vartoja politūrai, Erythroxylon coca — iš lapų Peruinai gamina kokainą.

Kelios rūšys palmų, Cycadinių, paparčių, orchidejų, Nepenthes, Drosera, spygliuočių, Mimosa pudica, Bromelinių ir kitokių. Iš viso augalų yra virš 100 giminių.

Botanikos Sodno uždavinus dvejopas:

Pirmiausiai jisai aptarnauja pedagoginį universiteto darbą, jisai yra mokslo priemonė dėstant botaniką studentams biologams, agronomams, farmaceutams ir mėdikams. Jau dabar, vieni metai po įkurimo, jisai duoda kaikurią demonstratyvę medžiagą praktikos darbams ir lekcijoms. Ateinančiais metais atliks jisai daug žymesnį darbą. Gyvi augalai žymiai palengvina darbą lektoriui ir teikia gyvumo lekcijoms iš anatomijos, fiziologijos ir augalų sistematikos. Be reikšmės universitetui botanikos sodnas turi dar platesnę reikšmę: lavinamąją ir praktiškai pritaikomąją visam kraštui. Be to botanikos sodnas supažindina vidurines mokyklas su pasaulio augmenija ir plačią visuomenę su gražiausiais dievaitės Floros vaikais.

Platus Botanikos Sodno parkas bus vaiksčiojimo ir poilsio vieta Kauno publikai. Žolynai, arboretum, rosarium ir šiltnamiai

supažindins ją su įvairiais augalais su įdomins ją ir įskiepys jai augmenijos meilę. Daugelis susiįdomavę pasistengs ir savo sodnuosę užveisti tokių augalų.

Jau ir dabar Botanikos Sodnas lankomas svečių iš įvairių Didžiosios ir Mažosios Lietuvos kraštų — Klaipėdos, Mažeikių, Panevėžio, Kauno ir kitų, nežiūrint to, kad apie Sodną nedaugelis dar težino. Botanikos Sodnas turi taip pat, kaip ir muzejai, teatrai, parodos ir kitos tam panašios įstaigos, bendro lavinimo reikšmę.

Praktiška pritaikomoji Botanikos Sodno reikšmė yra ta, kad čionai auginami dekoratyviniai vaistiniai, vaisiniai medžiai, krūmai ir daugmečiai augalai jų aklimatizacijai Lietuvoje. Sodnas, augindamas daugybę viso pasaulio šalių augalų, teikia Lietuvos sodnams sodinimo medžiagą.

Dabartiniu metu darbas tiek pastumėtas, kad už poros metų Botanikos Sodnas išleis jaunų geltonųjų akacijų (Caragana arborescens), per 2—4 metus priaugins laukinių ir kultūrinių vasinių medelių — obelių, kriaušių, kurių yra didelis reikalavimas krašte.

Be to Botanikos Sodnas greitu laiku pradės išleidinėti dekoratyvius medelius, krumus ir augalus.

Botanikos Sodnas užsiims taip pat aklimatizacija ir auginimu įvairių vaistinių, technikinių ir vaisinių daugiamečių žolių ir medžių. Bendrai Botanikos Sodnas su laiku bus visai Lietuvai centralinė sodininkystės įstaiga.

Botanikos Sodno darbo planan įeina taip pat ir kova su įvairiais augmenijos naikintojais — kenksmingais grybais ir vabalais. Projektuojama įsteigimas prie sodno, ankštai surištos su Botanikos Kabinetu, fitopatologinės laboratorijos, kurioje bus daromi turimai apie augmenijos priešus ir kovos būdus su jais, rekomenduojami išmėginti sodne vaistai ir populerizuojami išleidžiant tam tikrus lapelius ir brošiūras.

Jau dabar Botanikos Sodnas gali drąsiai rėkomenduoti nesenai išrastą aparatą „Rota Generator“ augalams rūkyti siera kuris davė Botanikos Sodno šiltnamyje gerų vaisių naikinant lapų uteles ir tripsus.

Atskirame plote, šaly Botanikos Sodno, įtaisoma tų vaistinių augalų plantacija, kurių kultūra Lietuvoj galima ir kuriems Lietuvoj turimas dedelis pareikalavimas.

Geri rezultatai gauti 1924 m. su sekančiais augalais: Matricaria chamomilla, Mentha piperita, Datura Stramonium, Salvia officinalis, Malva silvestris, Atropa Belladonna ir daug kitų.

Sodnas jau dabartiniu laiku gali drąsiai rekomenduoti kultūrai kai kuriuos vaistinius augalus (pav. Mentha, Matricaria, Atropa Belladonna ir kt.), o užbaigus tyrimus, davinės norintiems patarimus iš vaistinių augalų kultūros, kad atsikračius jų įvežimo iš užsienių.

II.

Botanikos Kabinetas ir Muzėjus savo darbu tampriai surišti su Botanikos Sodnu sprendžiant netiktai pedagogikos, bet ir daug platesnius — visos šalies klausimus.

Muzejus skirstosi į sekančius skyrius:

1. Muzejus, 2. Laboratorija, 3. Herbarius ir 4. Biblioteka. Dabartiniu metu Muzejus užima du kambariu Botanikos Sodno vedėjo bute A. Frėdos dvare ir turi apie 500 eksponatų. Nužiūrėta sekančių muzejaus skyrių įsteigimas: a) Sistematikos, b) Dendrologijos, c) Kultūrinių augalų, d) Augalų ligų, e) Augalų ekologijos, f) Augalų geografijos (jungiant čionai ir durpynus).

Visuose išvardytuose skyriuose jau yra šie dalykai: 1922 ir 1923 metais vedėjo surinkta kalnų augalų kolekcija; gauta iš Miškų departamento turtinga medžių rūšių kolekcija; iš Olandų gauta šiltų kraštų kultūrinių augalų kolekcija 220; be to nemaža sėklų ir vaisių, surinktų Lietuvoje. Muzejus galės būti atidarytas publikai tiktai tada, kada bus gautas didesnis jam butas. Dabartiniame bute viskas stovi anksčiai sukimšta ir dar tas pats butas yra Botanikos Sodno vedėjo darbo kabinetu.

Įdomesnieji Botanikos Muzejaus eksponatai: Kava ir jos rūšys 9 egz., medvilnė nuo augalo iki audimo 5, tapioka visose atmainose 11, arbata 6, augalų aliejai 12, pluoštiniai augalai 25, ryžiai 8, cukrinė nendrė 5, kokoso riešutai 6, pašarinių augalų sėklų kolekcija 20, duoninių ir darželiniu augalų sėklų kolekcija 20, Lietuvos medžių rūšys 30, medžių rūšių augimo anomalija 10, durpių pavyzdžiai 6, kempinių ir kitų grybų kolekcija 30, spygliuočių medžių skujos 25, kalnų augalų 15 ir daug kitų dalykų.

Botanikos kabineto biblioteka dabartiniu laiku turi apie 1300 knygų. Tame skaičiuje yra retų leidinių mokslo reikalams. Daugiausia Lietuvos florai pažinti. Reikės dar nemaža knygų visų Europos kraštų augalams pažinti, apibūdintojų, žurnalų, komplektų ir sistematikos darbų.

Brangesniosios bibliotekos knygos:

Index Kewensis, Linné, Genera plantarum; Ledebour, Flora rossica; Hallier, Flora von Deutschland, 32 tomai; Linné, Species plantarum; Thomé, Migula Kryptogamia; Englers Jahrbücher, visas komplektas iš 58 tomų; Englers Pflanzenreich, 84 tomai; Engler und Prantl, Die natürlichen Pflanzenfamilien ir daug kitų.

Laboratorija dabar aptarnauja tiktai Universiteto studentus. Yra lupos, mikroskopai, mikrotomas ir kiti prietaisai.

Herbarius turi apie 10 000 augalų ir skirstosi į šias dalis: Lietuvos, užsienių ir sporinių augalų herbarius.

Herbarius papildomas augalų rinkimu Lietuvoje, augalų pirkimu (pirkti Rytprusių, Vidurinės Europos, Estonijos ir sporinių Migulo herbarijai). Mainais gauti augalai iš Berlyno, taip gi ir iš kitų kraštų, Suomijos, Švedijos ir Italijos. Bet ir čionai trukdo darbą tinkamos vietos stoka. Dalis dėžių guli dar ir dabar užpakuotos Gamtos tyrimo Stoties karidoriuje. Herbarius, biblioteka ir laboratorija su laiku virs centrale vieta botanikos-floristiniams, botanikos-geografiniams ir fitopatologiniams tyrinėjimams Lietuvoje.

Kaunas, liepo mėn. 1924 m.

Prof. R. Regel.

Le Jardin Botanique de l'Université de Lithuanie.

Le Jardin Botanique de l'Université de Lithuanie fut inauguré le 8. Juillet 1923 en présence de Mr. le Président de la République de Lithuanie. Il comprend vers 30 hectares et est situé dans la propriété de Freda à 3 kilomètres du centre de la ville de Kaunas. Un ancien parc avec de beaux arbres, entre autres des Platanus occidentalis, quatre étangs, des fossés et les remparts de l'ancienne forteresse présentent des conditions

assez favorables pour l'établissement d'un jardin botanique. Le jardin comprendra outre la section systématique, biologique, l'Arboretum, l'Alpinetum, la section des plantes cultivées et la section des plantes horticoles encore des pépinières pour la culture de plantes, indispensables non seulement au jardin botanique, mais encore au pays entier. Le jardin aura donc une fonction, double: scientifique et pédagogique pour l'Université et purement appliquée pour le pays. Outre cela le jardin commence à être un lieu de promenade pour le public. Pour la culture des plantes tropiques une serre a été bâtie.

Actuellement le jardin possède vers les 1000 espèces de plantes de serres, 30 espèces de conifères, 188 espèces d'arbres et d'arbustes feuillacés, et 2000 espèces de plantes vivaces. En 1924 les collections de plantes ont été aggrandies. De belles collections de plantes vivantes ont été envoyées des jardins botaniques de Koenigsberg et de Berlin-Dahlem et des semences de bien d'autres jardiens botaniques, par ex de Pétrograd, Tiflis, Kopenhague, Berne, Marburg, Prague, Helsingfors, Hambourg, Uppsala, Goeteborg, Belgrade, Edinbourg, Paris, en échange contre des graines récoltées en Lithuanie et dans le jardin même. Le laboratoire et le musée botanique de l'Université sont en état d'organisation. La bibliothèque compte 1100 volumes environ, le musée — des objets différents, comme des plantes cultivées, une collection carpologique, une collection dendrologique.

L'herbier contient 10 000 plantes environ de la Lithuanie, de l'Allemagne, de la Suisse et de l'Esthonie. L'herbier de cryptogames contient la flore des cryptogames de Migula. Un échange a été fait avec l'herbier du jardin botanique de Berlin.

Figurentafeln zu der Abhandlung.

Die Abbildung $\zeta = \frac{\sqrt{z^2 - b^2} - \sqrt{z^2 - c^2}}{\sqrt{c^2 - b^2}}$

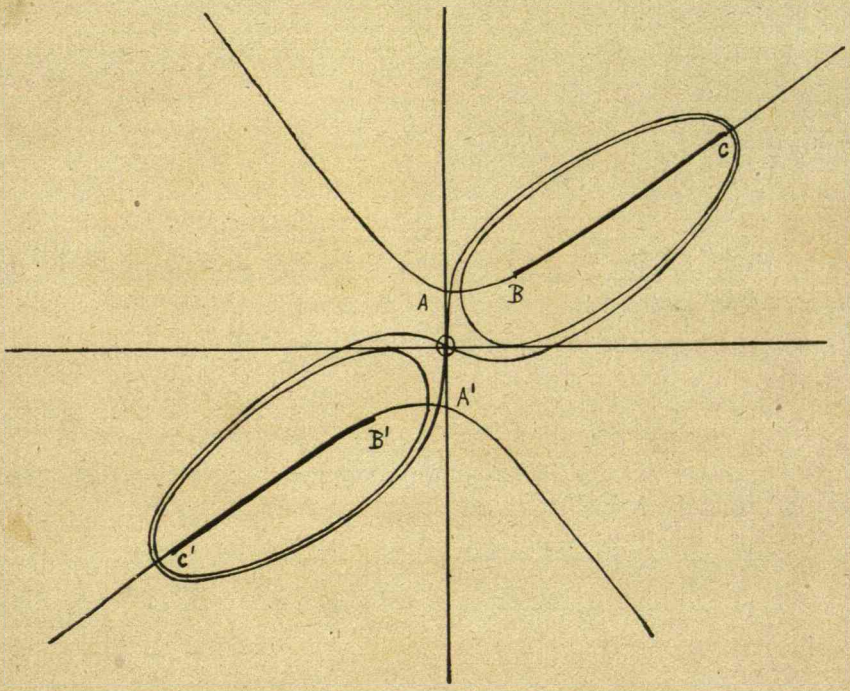


Fig. 1

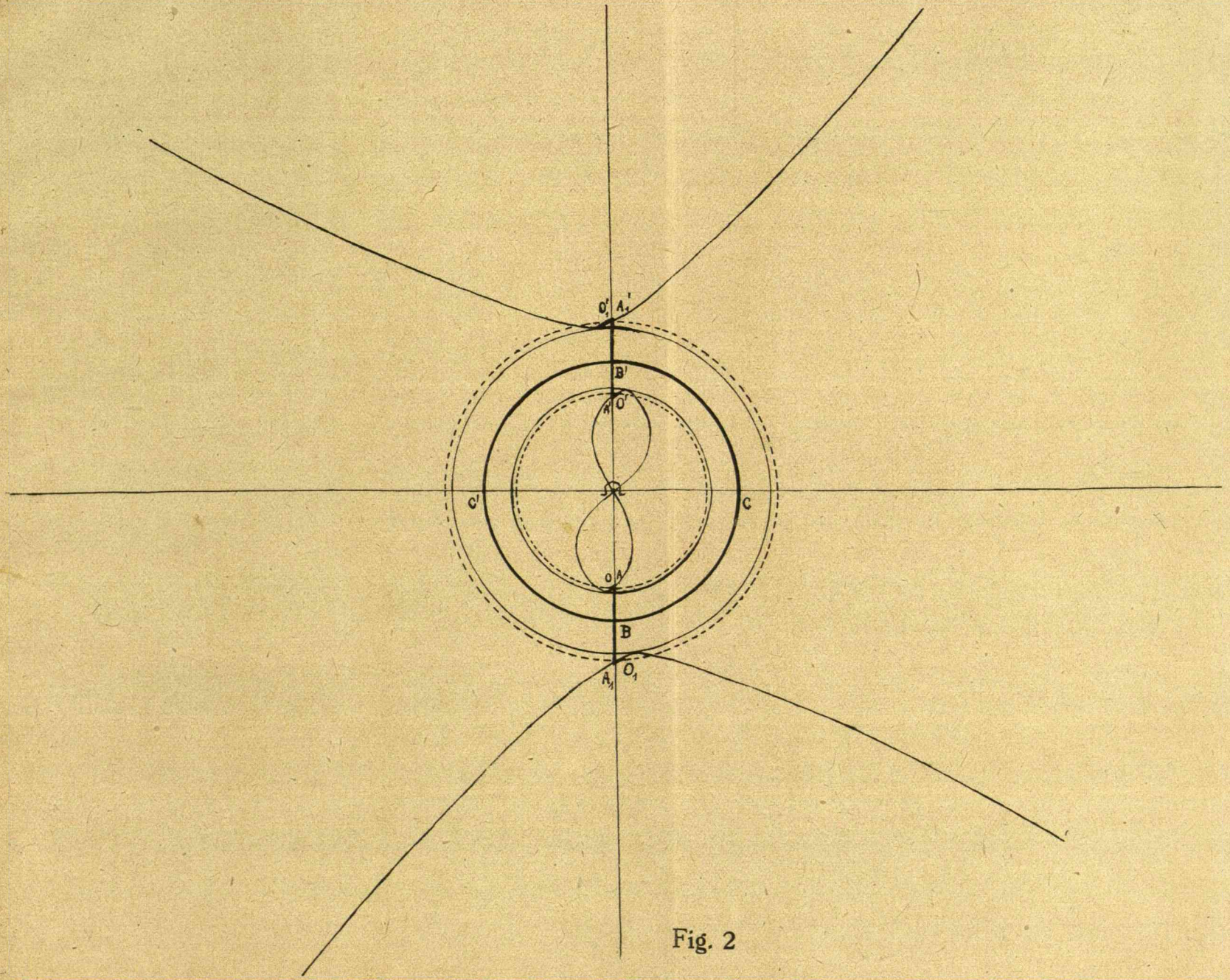


Fig. 2

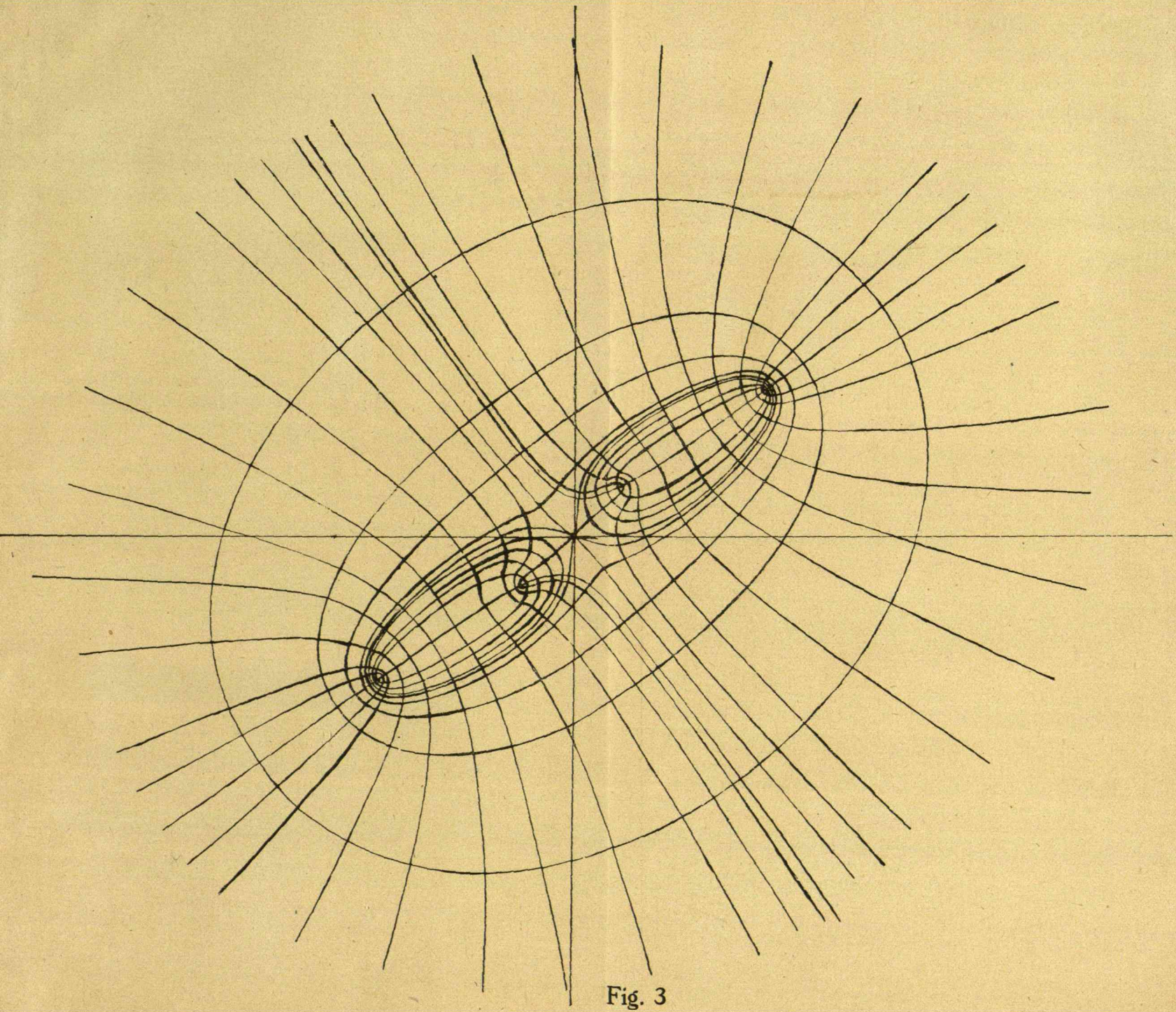


Fig. 3

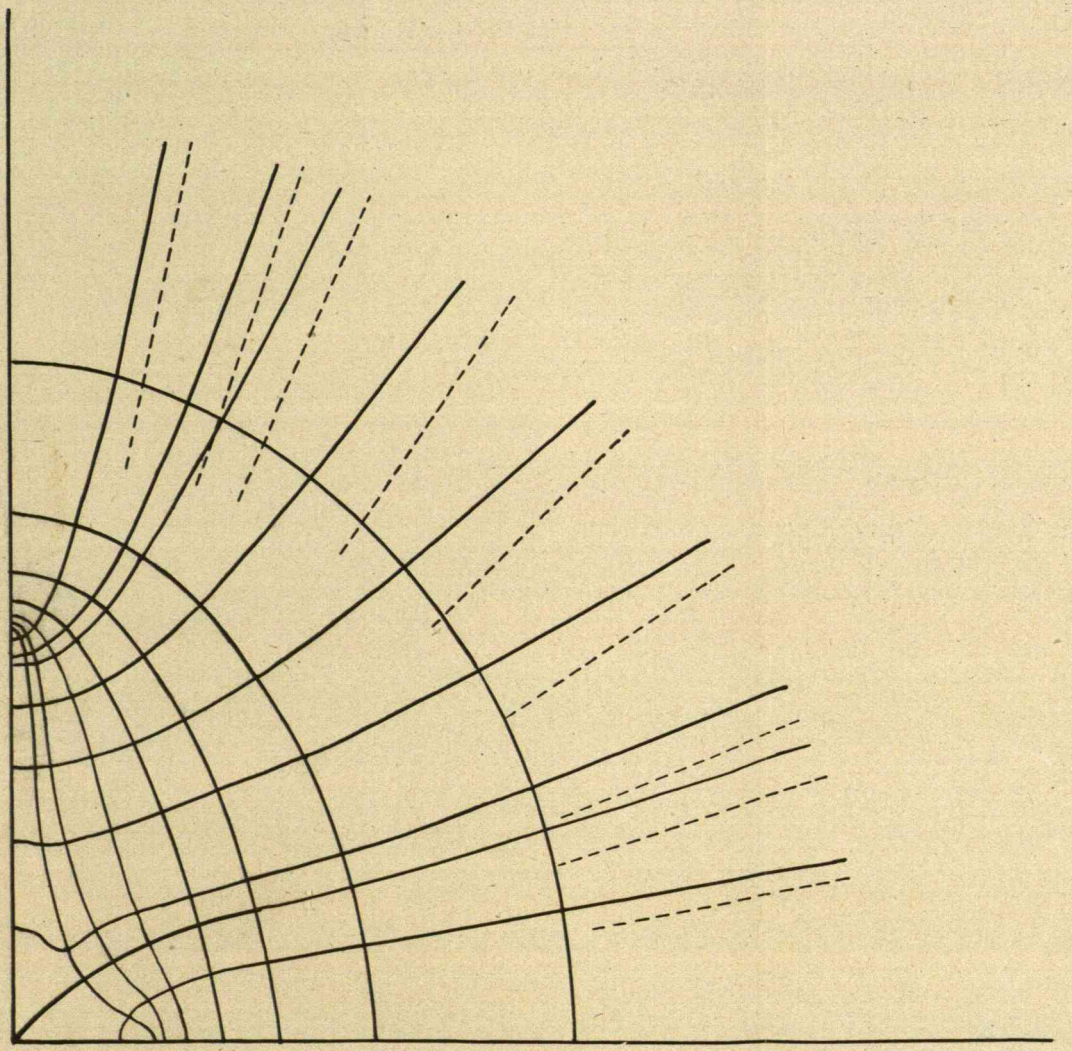


Fig. 4

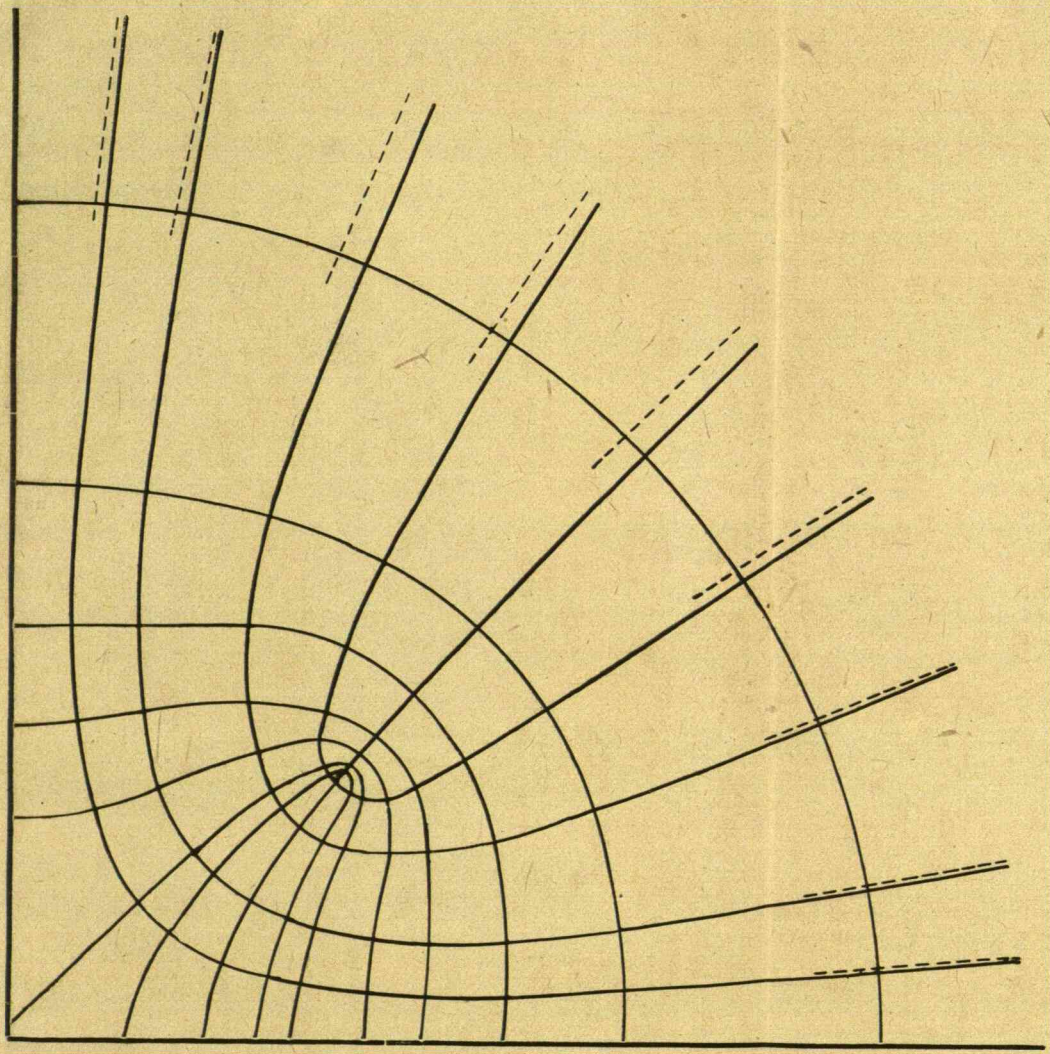


Fig. 5

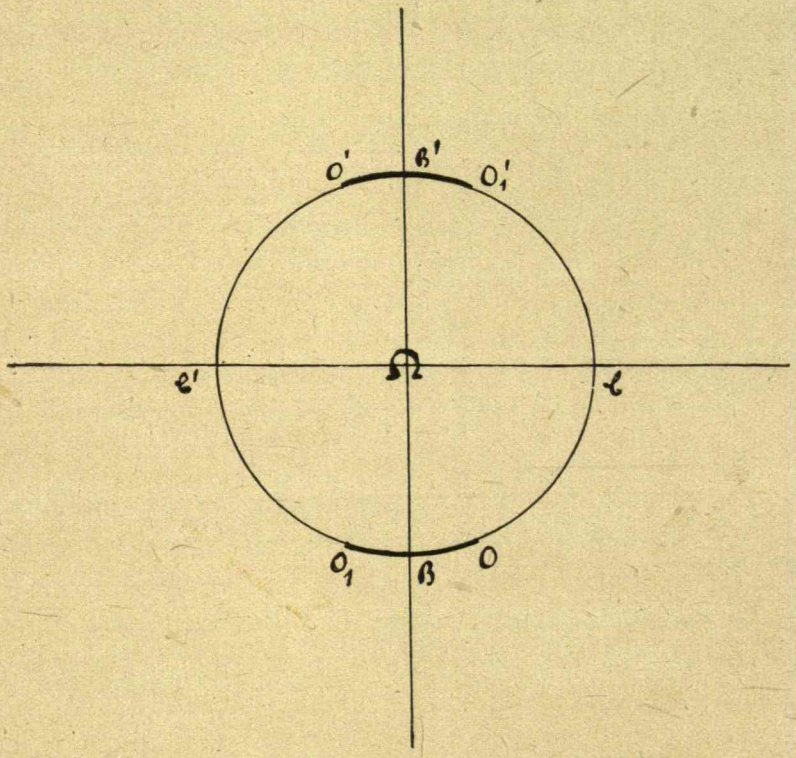


Fig. 6

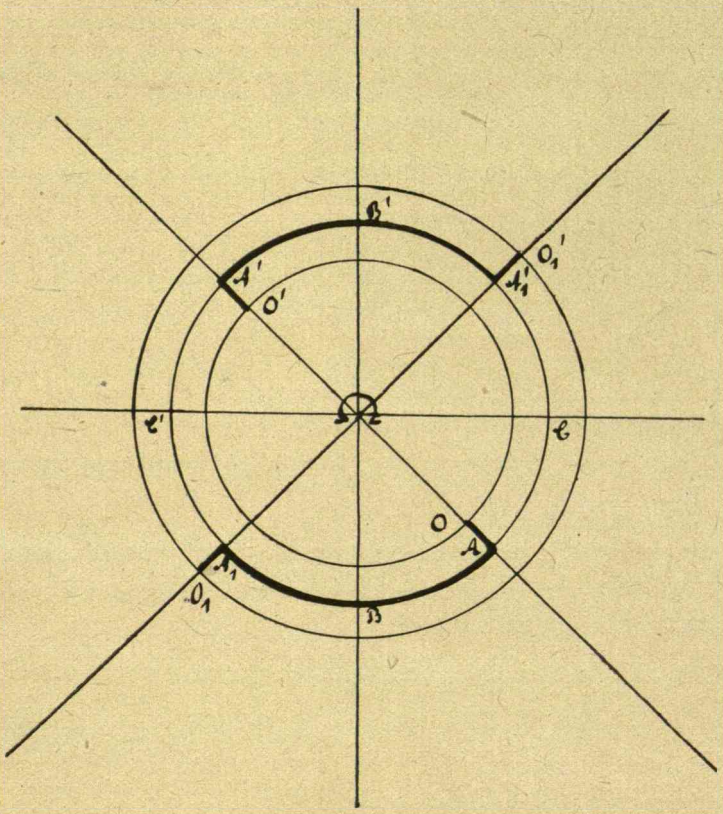


Fig. 7